

## Zadaci za vežbanje

### Hibridna analiza

#### Zadatak 1.

Operacioni menadžer kompanije XY dobio je zadatak da izabere najbolju lokaciju za njihov novi pogon za proizvodnju sokova. Alternativne lokacije koje su na raspolaganju su: Beograd, Niš, Novi Sad, Kragujevac. Menadžment želi da u sistem donošenja odluka uključi 2 kritička, 2 objektivna i 3 subjektivna faktora (dato u tabeli). Težine subjektivnih faktora su takođe date u tabeli. Odrediti najbolju lokaciju ako subjektivni faktori imaju veću težinu za 30% od objektivnih faktora.

Alternativne lokacije	Kritički		Objektivni		Subjektivni		
	Pristupni prilazi	Poreske olakšice	Prihodi	Troškovi rada i energije	Karakteristike radne snage 0,5	Stav lokalne zajednice 0,3	Izgled lokacije 0,2
Beograd	1	1	200	50	0,4	0,6	0,8
Niš	1	1	180	90	0,9	0,8	0,6
Novi Sad	0	1	150	135	0,7	0,5	0,7
Kragujevac	1	0	190	90	0,8	0,6	0,4

#### Rešenje:

Obzirom da kritički faktori moraju biti ispunjeni na svakoj lokaciji, lokacijska mera ne mora da se računava za lokacije Novi Sad i Kragujevac.

Da bi se dobila vrednost OFM<sub>i</sub> za svaku lokaciju i računava se najpre  $\sum_j OF_{ij}$  za svaku lokaciju i.

$$OF_{\text{Beograd}} = 50 - 200 = -150$$

$$OF_{\text{Niš}} = 90 - 180 = -90$$

$$OF_{\text{Novi Sad}} = 135 - 150 = -15$$

$$OF_{\text{Kragujevac}} = 90 - 190 = -100$$

Minimum  $\sum_j OF_{ij}$  je -150, a maksimum  $\sum_j OF_{ij}$  je -15.

$$OFM_i = \frac{\max_j \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right] - \min_j \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right]}{\max_j \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right] - \min_j \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right]}, i = 1, 2, \dots, m$$

$$OFM_{\text{Beograd}} = (-15 - (-150)) / (-15 - (-150)) = 135 / 135 = 1$$

$$OFM_{Niš} = (-15 - (-90))/(-15 - (-150)) = 75/135 = 0,56$$

Za ostale ne mora da se računa.

$$SFM_{Beograd} = 0,5 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,2 + 0,18 + 0,16 = 0,54$$

$$SFM_{Niš} = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,45 + 0,24 + 0,12 = 0,81$$

$$LM_i = CFM_i \cdot [\alpha \cdot OFM_i + (1 - \alpha) \cdot SFM_i]$$

$$+0,3 = 1 = 1/1,3 = 0,77$$

$$LM_{Beograd} = 1 \cdot [0,77 \cdot 1 + 0,23 \cdot 0,54] = 0,77 + 0,12 = 0,89$$

$$LM_{Niš} = 1 \cdot [0,77 \cdot 0,56 + 0,23 \cdot 0,81] = 0,43 + 0,19 = 0,62$$

Na osnovu lokacijske mere može se zaključiti da je najbolja lokacija Beograd.

## Zadatak 2.

Operacioni menadžer kompanije Z koja se bavi distribucijom proizvoda ku ne hemije dobio je zadatak da izabere najbolju lokaciju za njihov novi distributivni centar u Beogradu. Alternativne lokacije koje su na raspolaganju su: Šimanovci, Viline vode, Novi Beograd. Menadžment želi da u sistem donošenja odluka uključi 2 kritička, 2 objektivna i 2 subjektivna faktora (dato u tabeli). Težine subjektivnih faktora su takođe date u tabeli. Odrediti najbolju lokaciju ako subjektivni faktori imaju manju težinu za 20% od objektivnih faktora.

Alternativne lokacije	Kritički		Objektivni		Subjektivni	
	Pristupni prilazi	Infrastruktura	Prihodi	Troškovi rada i energije	Izgled lokacije 0,3	Stav lokalne zajednice 0,7
Šimanovci	1	1	150	30	0,4	0,8
Viline vode	1	1	180	80	0,8	0,7
Novi Beograd	1	1	160	45	0,9	0,3

Rešenje:

Obzirom da da kriti ki faktori moraju biti ispunjeni na svakoj lokaciji, lokacijska mera se ra una za sve.

Da bi se dobila vrednost OFMi za svaku lokaciju i ra una se najpre  ${}_jOF_{ij}$  za svaku lokaciju i.

$$OF_{\text{Šimanovci}} = 30 - 150 = -120$$

$$OF_{\text{Viline vode}} = 80 - 180 = -100$$

$$OF_{\text{Novi Beograd}} = 45 - 160 = -115$$

Minimum  ${}_jOF_{ij}$  je -120, a maksimum  ${}_jOF_{ij}$  je -100.

$$OFM_i = \frac{\max_i \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right] - \min_i \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right]}{\max_i \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right] - \min_i \left[ \sum_{j=1}^q OF_{ij} \right]}, i = 1, 2, \dots, m$$

$$OFM_{\text{Šimanovci}} = (-100 - (-120)) / (-100 - (-120)) = 20/20 = 1$$

$$OFM_{\text{Viline vode}} = (-100 - (-100)) / (-100 - (-120)) = 0/20 = 0$$

$$OFM_{\text{Novi Beograd}} = (-100 - (-115)) / (-100 - (-120)) = 15/20 = 0,75$$

$$SFM_{\text{Šimanovci}} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,12 + 0,56 = 0,68$$

$$SFM_{\text{Viline vode}} = 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,49 = 0,73$$

$$SFM_{\text{Novi Beograd}} = 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,27 + 0,21 = 0,48$$

$$LM_i = CFM_i \cdot [\alpha \cdot OFM_i + (1 - \alpha) \cdot SFM_i]$$

$$+0,8 = 1 = 1/1,8 = 0,56$$

$$LM_{\text{Šimanovci}} = 1 \cdot [0,56 \cdot 1 + 0,44 \cdot 0,68] = 0,56 + 0,30 = 0,86$$

$$LM_{\text{Viline vode}} = 1 \cdot [0,56 \cdot 0 + 0,44 \cdot 0,73] = 0,32$$

$$LM_{\text{Novi Beograd}} = 1 \cdot [0,56 \cdot 0,75 + 0,44 \cdot 0,48] = 0,42 + 0,21 = 0,63$$

Na osnovu lokacijske mere može se zaklju iti da je najbolja lokacija Šimanovci.

(Koriš eno je matemati ko zaokruživanje)

## Problem prekrivanja skupa

Korak 1. Ako je  $C_j = 0$  za svako  $j = 1, 2, \dots, n$ , dodeliti jedinicu  $X_j = 1$  i ukloniti sva ograničenja u kojima se  $X_j$  pojavljuje sa koeficijentom  $+1$ .

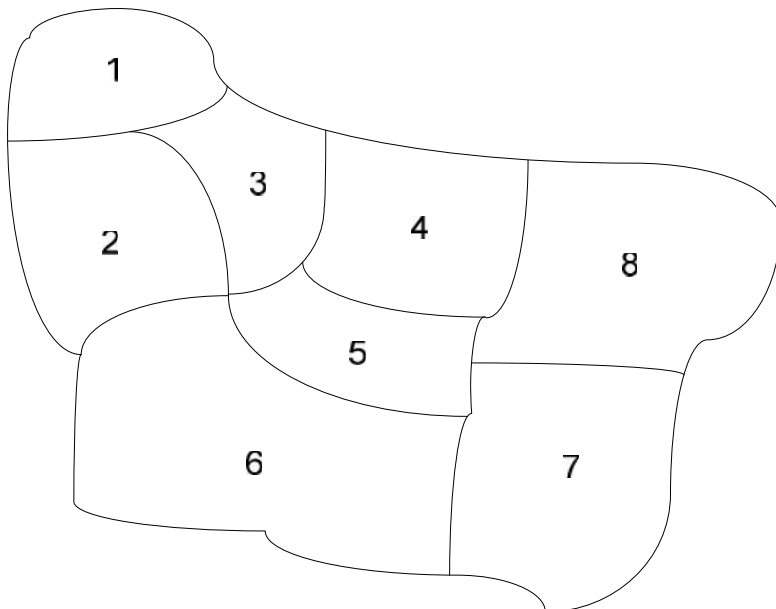
Korak 2. Ako je  $C_j > 0$ , za bilo koje  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $X_j$  se ne pojavljuje sa koeficijentom  $+1$  ni u jednom preostalom ograničenju, dodeliti mu vrednost  $X_j = 0$ .

Korak 3. Za sve preostale promenljive, utvrditi odnos  $c_j/d_j$ , gde je  $d_j$  broj ograničenja u kojima se  $x_j$  pojavljuje sa koeficijentom  $+1$ . Promenljivoj  $k$  dodeliti je količnik  $C_k/d_k$  najmanji, dodeliti  $x_k = 1$  i ukloniti sva ograničenja u kojima se  $x_k$  pojavljuje sa koeficijentom  $+1$ . Potom rešiti dobijeni model.

Korak 4. Ako nema više ograničenja, svim ostalim promenljivama dodeliti vrednost 0, što označava i rešenje problema. Ukoliko imajoš ograničenja, idite na korak 1.

Zadatak 1.

Trgovinsko preduzeće želi da otvori više maloprodajnih objekata na teritoriji grada Niša, sa namerom da pokrije svu teritoriju grada i da svaki klijent bude u mogućnosti da do njihovog objekta stigne u roku od 10 minuta. Grad Niš podeljen je na 8 gradskih blokova. Maloprodajni objekti mogu biti locirani u centar svakog bloka, a troškovi lociranja u svakoj zoni iznose 80, 50, 40, 95, 105, 90, 75, 100 hiljada novanih jedinica. (ograničenje od 10 minuta podrazumeva da klijenti mogu da stignu za to vreme do centra svoje zone i do centara samo susednih zona)



Slika 1. Grad Niš podeljen na 8 blokova

Rešenje:

Formuliše se prvi model, tako što se najpre napravi matrica, a zatim i definiše funkcija cilja i ograničenja.

Matrica se pravi na osnovu slike.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	1	1	1	0	0	1
5	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	1	1	1	0
7	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	0	1	1

$$\text{Min } F = 80 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 + 95 \cdot x_4 + 105 \cdot x_5 + 90 \cdot x_6 + 75 \cdot x_7 + 100 \cdot x_8$$

p.o.

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 1$$

Obzirom da su svi troškovi  $c_j > 0$  i da svi  $x_j$  postoje u ograničenjima ide se na korak 3. (zaokruživati na dve decimale)

$$c_1/d_1 = 80/3 = 26,67 \quad c_5/d_5 = 105/6 = 17,50$$

$$c_2/d_2 = 50/4 = 12,50 \quad c_6/d_6 = 90/4 = 22,50$$

$$c_3/d_3 = 40/5 = 8,00 \quad c_7/d_7 = 75/4 = 18,75$$

$$c_4/d_4 = 95/4 = 23,75 \quad c_8/d_8 = 100/4 = 25,00$$

min  $ck/dk = 8,00$  za  $k=3$  Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja  $x_3$  i  $x_3=1$

Novi model

$$\text{Min } F = 80 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 95 \cdot x_4 + 105 \cdot x_5 + 90 \cdot x_6 + 75 \cdot x_7 + 100 \cdot x_8$$

p.o.

$$x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 1$$

Svi troškovi su veći od nule i prelazi se na korak 2.

Korak 2. Obzirom da se  $x_1$  javlja u funkciji cilja a nema ga u ograničenjima  $x_1=0$

Korak 3.

$$c_2/d_2 = 50/1 = 50,00 \quad c_6/d_6 = 90/2 = 45,00$$

$$c_4/d_4 = 95/1 = 95,00 \quad c_7/d_7 = 75/3 = 25,00$$

$$c_5/d_5 = 105/3 = 35,00 \quad c_8/d_8 = 100/2 = 50,00$$

min  $ck/dk = 25,00$  za  $k=7$  Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja  $x_7$  i  $x_7=1$

Novi model

$$\text{Min } F = 50 \cdot x_2 + 95 \cdot x_4 + 105 \cdot x_5 + 90 \cdot x_6 + 100 \cdot x_8$$

p.o.

Kada se izbacuju ograničenja sa  $x_7$  onda ne preostaje nijedno ograničenje i piše se

$$x_2, x_4, x_5, x_6, x_8 \geq 0 \quad \text{i} \quad x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$$

Konačno rešenje

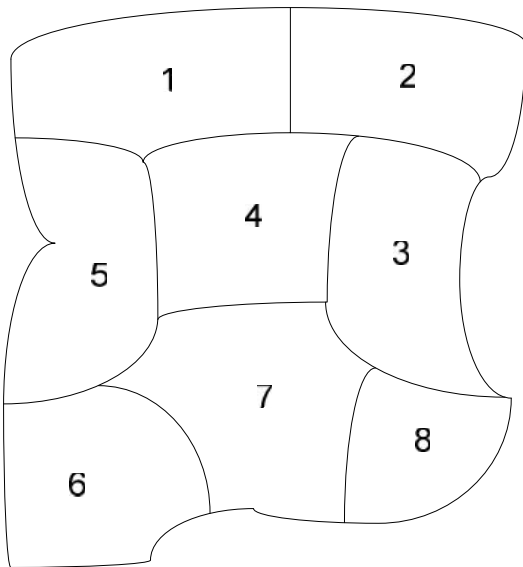
$$x_3 = x_7 = 1 \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$$

$$\text{min } F = 40 + 75 = 115$$

Maloprodajni objekti će biti smešteni u zonama 3 i 7 i troškovi lociranja objekata će iznositi 115 hiljada novanih jedinica, i iz zone 3 će se snabdevati korisnici iz zona 1,2,3,4,5, a iz zone 7 korisnici iz zona 5,6,7 i 8. (ovaj deo se radi tako što se posmatraju treći i sedmi red iz matrice ili treći i sedmo ograničenje iz početnog modela).

## Zadatak 2.

Trgovinsko preduzeće želi da otvori više maloprodajnih objekata na teritoriji grada Kragujevca, sa namerom da pokrije svu teritoriju grada i da svaki klijent bude u mogućnosti da do njihovog objekta stigne u roku od 5 minuta. Grad Kragujevac podeljen je na 8 gradskih blokova. Maloprodajni objekti mogu biti locirani u centar svakog bloka, a troškovi lociranja u svakoj zoni iznose 100, 50, 200, 40, 60, 80, 90, 150 hiljada novanih jedinica. (ograničenje od 5 minuta podrazumeva da klijenti mogu da stignu za to vreme do centra svoje zone i do centara samo susjednih zona)



Slika 1. Grad Kragujevac podeljen na 8 blokova

Rešenje:

Formuliše se prvi model, tako što se najpre napravi matrica, a zatim i definiše funkcija cilja i ograničenja.

Matrica se pravi na osnovu slike.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	1	0	1	0
5	1	0	0	1	1	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	1	0
7	0	0	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0	1	1

$$\text{Min } F = 100 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 + 40 \cdot x_4 + 60 \cdot x_5 + 80 \cdot x_6 + 90 \cdot x_7 + 150 \cdot x_8$$

p.o.

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$$

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1$$

$$x_3 + x_7 + x_8 \geq 1$$

Obzirom da su svi troškovi  $c_j > 0$  i da svi  $x_j$  postoje u ograničenjima ide se na korak 3. (zaokruživati na dve decimale)

$$c_1/d_1 = 100/4 = 25,00 \quad c_5/d_5 = 60/5 = 12,00$$

$$c_2/d_2 = 50/4 = 12,50 \quad c_6/d_6 = 80/3 = 26,67$$

$$c_3/d_3 = 200/5 = 40,00 \quad c_7/d_7 = 90/6 = 15,00$$

$$c_4/d_4 = 40/6 = 6,67 \quad c_8/d_8 = 150/3 = 50,00$$

$\min c_k/d_k = 6,67$  za  $k=4$  Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja  $x_4$  i  $x_4=1$

Novi model

$$\text{Min } F = 100 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 + 60 \cdot x_5 + 80 \cdot x_6 + 90 \cdot x_7 + 150 \cdot x_8$$

p.o.

$$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$x_3 + x_7 + x_8 \geq 1$$

Svi troškovi su veći od nule i prelazi se na korak 2.

Korak 2. Obzirom da se  $x_1$  i  $x_2$  javlja u funkciji cilja a nema ga u ograničenjima  $x_1 = x_2 = 0$

Korak 3.

$$c_3/d_3 = 200/1 = 200,00 \quad c_7/d_7 = 90/2 = 45,00$$



$$c_5/d_5=60/1=60,00 \quad c_8/d_8=150/1=150,00$$

$$c_6/d_6=80/1=80,00$$

min  $c_k/d_k=45,00$  za  $k=6$  Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja  $x_6$  i  $x_6=1$

Novi model

$$\text{Min } F = 200 \cdot x_3 + 60 \cdot x_5 + 90 \cdot x_7 + 150 \cdot x_8$$

p.o.

$$x_3 + x_7 + x_8 \geq 1$$

Korak 2. Pošto  $x_5$  postoji u funkciji cilja, a nema ga u ograničenjima onda je  $x_5=0$ .

Korak 3.

$$c_3/d_3=200/1=200,00 \quad c_7/d_7=90/1=90,00 \quad c_8/d_8=150/1=150,00$$

min  $c_k/d_k=90,00$  za  $k=7$  Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja  $x_7$  i  $x_7=1$

Novi model

$$\text{Min } F = 200 \cdot x_3 + 60 \cdot x_5 + 150 \cdot x_8$$

p.o.

Kada se izbacе ograničenja sa  $x_7$  onda ne preostaje nijedno ograničenje i piše se

$$x_3, x_5, x_8 \geq 0 \quad \text{i} \quad x_3 = x_5 = x_8 = 0$$

Konačno rešenje

$$x_4 = x_6 = x_7 = 1 \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_8 = 0$$

$$\text{min } F = 40 + 80 + 90 = 210$$

Maloprodajni objekti će biti smešteni u zonama 4, 6 i 7 i troškovi lociranja objekata će iznositi 210 hiljada novanih jedinica, i iz zone 4 će se snabdevati korisnici iz zona 1,2,3,4,5 i 7, iz zone 6 korisnici iz zona 5,6 i 7 i iz zone 7 korisnici iz zona 3,4,5,6,7 i 8. (ovaj deo se radi tako što se posmatraju četvrti, šesti i sedmi red iz matrice ili četvrto, šesto i sedmo ograničenje iz početnog modela).

## 2. REŠAVANJE VEBEROVOG PROBLEMA SA PRAVOUGAONOM METRIKOM

U urbanim sredinama Euklidova metrika kojom se određuje direktno rastojanje između u novih i postoje ih ta aka je esto neprimenljiva. U gradskim uslovima ulice kojima se kreću u vozila se uglavnom seku pod pravim uglom. Zato se javlja potreba za rešavanje Veberovog problema pravougaonom metrikom.

Potrebno je rešiti sledeći problem:

$$(\min)_{I=1}^m f(x) = \sum_{I=1}^m w_i d_i(x) = \sum_{I=1}^m w_i (|x_1 - a_1^I| + |x_2 - a_2^I|) = \sum_{I=1}^m w_i |x_1 - a_1^I| + \sum_{I=1}^m w_i |x_2 - a_2^I|$$

$$(\min) f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Na taj način rešavanje problema sa dve promenljive svedeno je na rešavanje dva nezavisna zadatka sa po jednom promenljivom. Prvo se rešava problem za jednu koordinatu:  $(\min) f_1(x_1)$  odakle se dobija  $x_1^*$ , a zatim za drugu:  $(\min) f_2(x_2)$  odakle se dobija  $x_2^*$ . Tada  $X^* = (x_1^*, x_2^*)$  predstavlja rešavanje polaznog Veberovog problema.

Ako su zadate tačke  $A_i = (a_1^i, a_2^i)$  i težinski koeficijenti tih tačaka  $w_i$ ,  $i=1, \dots, m$  algoritam za određivanje  $j$ -te koordinate je:

1. Sortirati koordinate tačaka  $A_i$ ,  $i=1, \dots, m$  u neopadajući niz. Dalje se pretpostavlja da indeks  $(i)$  raste po sortiranoj redosledu:  $a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m$ . Moguće su dva slučaja:

2. Ako za neko  $k$  koje pripada skupu  $\{1, 2, \dots, m\}$  važi  $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i < \sum_{i=1}^k w_i$  pri čemu za  $k=1$

leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena  $j$ -ta koordinata  $x_j^* = a_j^k$ .

3. Ako za neko  $k$  koje pripada skupu  $\{1, 2, \dots, m\}$  važi  $\sum_{i=1}^m w_i = \sum_{i=1}^k w_i$  tada je rešenje

višestruko, tj. tražena koordinata  $x_j^*$  može da ima bilo koju vrednost iz intervala  $[a_j^k, a_j^{k+1}]$ .

Primenjujući ovaj algoritam za  $j=1$ , a potom za  $j=2$  dobijaju se obe koordinate tačke  $X^*$ .

**Zadatak 1:** U jednoj opštini se nalaze četiri naseljena mesta. Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz svih četiri naselja. Lokacije mesta (koordinate u kilometrima) su  $A_1(4,4)$ ,

$A_2(3,1), A_3(6,4), A_4(6,2)$ . Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole tako da ukupan put svih aka od ku e do škole bude minimalan. Ako su težine ta aka redom  $w_1=4, w_2=1, w_3=2, w_4=3$  rešiti zadatak koriste i pravougaonu metriku.

**Rešenje:**

Koordinata  $x_1$ : Sortiraju se ta ke po prvoj koordinati I posmatramo njihove težine.

Koordinate  $(a_1^j)$  : 3, 4, 6, 6

Težine  $(w_j)$  : 1, 4, 2, 3

k : 1, 2, 3, 4

$\sum_{i=1}^k w_i$  : 1, 5, 7, 10

Pošto je  $\sum_{i=1}^m w_i = 5$ , za  $k=2$  je zadovoljen uslov da je  $\sum_{i=1}^m w_i = \sum_{i=1}^k w_i$ . Zna i koordinata  $x_1^*$

može imati bilo koju vrednost između 4 i 6, tj.  $4 \leq x_1^* \leq 6$ .

Koordinata  $x_2$ : Na isti način se sortiraju ta ke po drugoj koordinati:

Koordinate  $(a_2^j)$  : 1, 2, 4, 4

Težine  $(w_j)$  : 1, 3, 2, 4

k : 1, 2, 3, 4

$\sum_{i=1}^k w_i$  : 1, 4, 6, 10

Važi da je  $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \sum_{i=1}^m w_i < \sum_{i=1}^k w_i$  za  $k=3$  odnosno  $x_2^* = a_2^3 = 4$ . Ovaj zadatak ima beskonačno

mного rešenja, tj.  $X^* = (x_1^*, 4)$ , gde je  $x_1^*$  pripada skupu  $[4, 6]$ .

**Zadatak 2.** Rešiti Veberov problem koriste i pravougaonu metriku.

Lokacije		L1	L2	L3	L4	L5	L6
Koordinate	X	500	400	200	500	300	100
	Y	200	300	400	500	100	200
Težinski koeficijenti		0.08	0.04	0.22	0.10	0.12	0.44

Rešenje:

$j=1$  odnosno x koordinata

1. Sortirati koordinate ta aka  $A_i, i= 1, ..m$  u neopadajućem nizu

$a_1^i$	100	200	300	400	500	500
$w_i$	0.44	0.22	0.12	0.04	0.08	0.10
$w_i$	0.44	0.66	0.78	0.82	0.9	1

1/2  $w_i=0.5$  to j izme u 100 i 200 pošto je  $0.44 < 0.5 < 0.66$  za  $k=2$  što zna i  $X^*=200$

za  $j=2$  odnosno y

$A_2^i$	100	200	200	300	400	500
$w_i$	0.12	0.08	0.44	0.04	0.22	0.10
$w_i$	0.12	0.20	0.64	0.68	0.90	1

$0.20 < 0.5 < 0.64$   $k=3$   $Y^*=200$

### 3. VAJSFELDOV ALGORITAM ZA REŠAVANJE VEBEROVOG PROBLEMA

Veberov problem Euklidove metrike nije moguće rešiti analitički. Zato se često koristi Vajsfeldov algoritam kojim se dobija približno rešenje Veberovog problema.

Dato je  $m$  tačaka  $A_i = (a_1^i, a_2^i)$ , njihove težine  $w_i, i=1, \dots, m$  i koeficijent kriterijuma zaustavljanja  $\epsilon > 0$ . Potrebno je odrediti lokaciju (koordinate) nove tačke koristeći kao kriterijum sumu otežanih rastojanja (*minisum* problem).

Pošto se zna da ovaj algoritam jako sporo konvergira kada se optimalno rešenje poklapa sa jednom od zadatih tačaka, najpre se proverava da li je neka od postojećih tačaka optimalna lokacija za novi objekat. Ako se utvrdi da nije, prelazi se na iterativni deo algoritma:

1. Izračunati međusobna rastojanja između u svih  $m$  tačaka:

$$d(A_r, A_l) = \sqrt{(a_1^r - a_1^l)^2 + (a_2^r - a_2^l)^2}, \quad \forall r, l \in \{1, \dots, m\}$$

2. Proveriti da li za neku tačku  $r$  koja pripada skupu  $\{1, \dots, m\}$  važi:

$$c_r = \sqrt{\left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{w_i (a_1^r - a_1^i)}{d(A_r, A_i)} \right)^2 + \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{w_i (a_2^r - a_2^i)}{d(A_r, A_i)} \right)^2} \leq \epsilon$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neku  $r \Rightarrow$  KRAJ. Rešenje se nalazi u tački  $A_r$ . U suprotnom, ići na sledeći korak.

3. Stavimo da je  $k = 0$  i odredimo početno rešenje  $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$  po formuli:

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^m w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^m w_i}, \quad j = 1, 2$$

4. Izračunati rastojanja između u  $X^k = (x_1^k, x_2^k)$  i zadatih tačaka:

$$d(X^k, A_i) = \sqrt{(x_1^k - a_1^i)^2 + (x_2^k - a_2^i)^2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

5. Računamo po iterativnoj formuli:

$$x_j^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i a_j^i}{d(X^k, A_i)}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d(X^k, A_i)}}, \quad j = 1, 2$$

6. Ako je  $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \epsilon$ , za svako  $j$  koje pripada skupu  $\{1, 2\} \Rightarrow$  KRAJ.  $X^{k+1}$  se usvaja kao "dovoljno dobro" rešenje. U suprotnom, staviti  $k=k+1$  i ići na korak 4.

**Zadatak 3:** Date su koordinate i težinski koeficijenti za četiri tačke. Potrebno je odrediti koordinate nove tačke i suma otežanih rastojanja od zadatih tačaka biti minimalna. Koristiti Euklidovu metriku, a za koeficijent kriterijuma zaustavljanja uzeti  $\epsilon = 0,05$ . (slika 1.)

$$A_1(4,4), w_1=4 \quad A_2(3,1), w_2=1 \quad A_3(6,4), w_3=2 \quad A_4(6,2), w_4=4$$

**Rešenje:** 1) Određujemo međusobna rastojanja zadatih tačaka:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} = 3,162$$

$$d(A_1, A_3) = \sqrt{(6-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(A_1, A_4) = 2,828$$

$$d(A_2, A_3) = 4,243$$

$$d(A_2, A_4) = 3,162$$

$$d(A_3, A_4) = 2$$

2) Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih tačaka: proverava se da li je  $c_r \leq w_r$

$$c_1 = [(1(4-3)/3,162 + 2(4-6)/2 + 4(4-6)/2,828)^2 + (1(4-1)/3,162 + 2(4-4)/2 + 4(4-2)/2,828)^2]^{1/2} = 5,884 < 4$$

$$c_2 = [(4(3-4)/3,162 + 2(3-6)/4,243 + 4(3-6)/3,162)^2 + (4(1-4)/3,162 + 2(1-4)/4,243 + 4(1-2)/3,162)^2]^{1/2} = [(-1,265 - 1,414 - 3,795)^2 + (-3,795 - 1,414 - 0,316)^2]^{1/2} = [41,91 + 86,86]^{1/2} = 11,34 \text{ ili } 9,155 > 1$$

$$c_3 = 6,657 > 2$$

$$c_4 = 9,884 > 4$$

Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih tačaka. Prelazimo na iterativni deo.

3) Određujemo početno rešenje  $X^0$ :

$$x_1^0 = (4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6) / (4 + 1 + 2 + 4) = 5$$

$$x_2^0 = (4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2) / (4 + 1 + 2 + 4) = 3$$

4) Izračunajmo rastojanja od početnog rešenja do zadatih tačaka:

$$d(X^0, A_1) = \sqrt{(5-4)^2 + (3-4)^2} = 1,414$$

$$d(X^0, A_2) = 2,828$$

$$d(X^0, A_3) = 1,414$$

$$d(X^0, A_4) = 1,414$$

5) Određivanje novog rešenja  $X^1$ :

$$x_1^1 = 5,0952$$

$$x_2^1 = 3,0952$$

6) Proverava se da li je ispunjen kriterijum zaustavljanja :

$$|5 - 5.0952| = 0.0952 > \epsilon \text{ dakle mora nova iteracija moraju biti zadovoljena i } x_1 \text{ i } x_2 < \epsilon$$

4) Računajmo rastojanje između nove tačke (5.0952; 3.0952) i zadatih tačaka

$$d(X^1, A_1) = 1,421$$

$$d(X^1, A_2) = 2,936$$

$$d(X^1, A_3) = 1,275$$

$$d(X^1, A_4) = 1,421$$

5) Određivanje novog rešenja

$$x_1^2 = 5,118$$

$$x_2^2 = 3,118$$

$$6) |5,0952 - 5,118| = 0,023 < \epsilon$$

$$|3,0952 - 3,118| = 0,023 < \epsilon$$

=>KRAJ

**Zaključak:**  $\bar{X} = (5,118, 3,118)$  je "dovoljno dobro" rešenje zadatka.

**Zadatak 4.** U jednoj opštini se nalaze četiri naseljena mesta. Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz sva četiri naselja. Da bi se odredila lokacija nove škole, u obzir se uzimaju položaji tih naselja i broj stanovnika (smatra se da je broj aka proporcionalan broju stanovnika). Lokacije mesta (koordinate zadate u kilometrima) i broj stanovnika (u hiljadama) je dat u sledejoj tabeli.

Mesta:	M1	M2	M3	M4
X	3	8	10	12
Y	7	1	5	1
Broj stanovnika	80	30	25	40

Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole, tako da ukupan put svih aka od kuće do škole bude minimalan. Smatra se da je put od naselja do škole pravolinijski i da je rezultat dovoljno dobar ako je razlika obe koordinate izme u dve uzastopne iteracije manja od 20 metara.

**Rešenje:** Na osnovu teksta zadatka se zaključuje da se radi o Veberovom problem i Euklidovoj metrici, dakle primeniemo Vajsfeldov algoritam s tim da je  $\epsilon = 0.02$  km

1. Određujemo međusobna rastojanja izme u zadatih ta aka:

$$\begin{aligned} d(M1,M2) &= 7.810 \\ d(M1,M3) &= 7.28 \\ d(M1,M4) &= 10.817 \\ d(M2,M3) &= 4.472 \\ d(M2,M4) &= 4.0 \\ d(M3,M4) &= 4.472 \end{aligned}$$

2. Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih ta aka:

$$c1 = 92.88 > 80$$

$$c2 = 83.82 > 30$$

$$c3 = 83.07 > 25$$

$$c4 = 126.7 > 40$$

Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih ta aka. Prelazi se na iterativni deo.

3. Određuje se početno rešenje  $x^0$ :

$$x1^0 = 6.914 \quad x2^0 = 4.314$$

4. Izražava se udaljenost od početnog rešenja do zadatih ta aka:

$$d(x^0, M1) = 4.747$$



$$\begin{aligned}d(x^0, M2) &= 3.488 \\d(x^0, M3) &= 3.161 \\d(x^0, M4) &= 6.070\end{aligned}$$

5. Određivanje novog rešenja:

$$X1^1 = 6.947 \quad X2^1 = 4.323$$

6. Pošto je  $|6.914 - 6.947| = 0.033 > e$  sledi  $k=1$ , nova iteracija.

$$\begin{aligned}4. d(x^1, M1) &= 4.769 \\d(x^1, M2) &= 3.486 \\d(x^1, M3) &= 3.128 \\d(x^1, M4) &= 6.048\end{aligned}$$

$$5. X1^2 = 6.964 \quad X2^2 = 4.317$$

7.  $|6.947 - 6.964| = 0.017 < e$   
 $|4.323 - 4.317| = 0.006 < e$  sledi kraj Dakle, za lokaciju gradnje škole se usvaja tačka (6,964 ; 4,317)

## RASPORED

Primer 1.

Menadžment kompanije „Walters“ želi da rasporedi 6 odeljenja svoje fabrike tako da smanji troškove prenosa materijala izme u odljenja. Polazna pretpostavka (kako bi se olakšao problem) je da je svako odeljenje veli ine 20x20 stopa, a da je zgrada fabrike dužine 60 stopa i široka 40 stopa. Koraci procesa koji se slede za rešavanja problema su:

1. Oformiti matricu koja pokazuje protok materijala izme u odeljenja

	1	2	3	4	5	6
1		50	100	0	0	20
2			30	50	10	0
3				20	0	100
4					50	0
5						0
6						

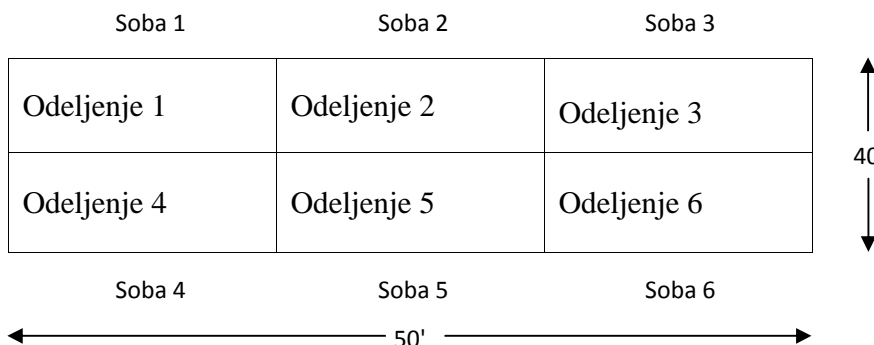
2. Odrediti prostorne zahteve za svako odeljenje
3. Nacrtati po etnu šemu rasporeda odljenja i puteve prenosa materijala. Pokušati da rasporedimo odeljenja sa većim protokom materijala jedno do drugog.
4. Odrediti troškove rasporeda koriste i formulu:

$$\text{Troškovi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij}$$

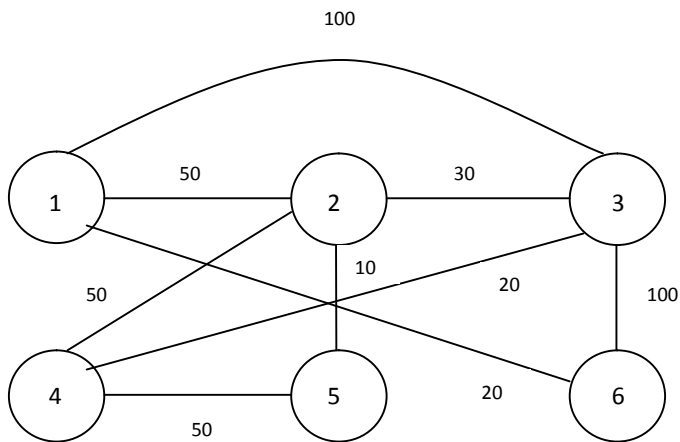
Za ovaj problem kompanija „Walters“ pretpostavlja da se sav transport materijala obavlja pomo u viljuškara. troškovi prenosa tereta izme u dva odeljenja, koja se nalaze jedno pored drugog je procenjeno na 1\$. Prenos izmedju odeljenja koja se ne nalaze jedno pored drugog iznosi 2\$.

$$\text{Troškovi} = (50 \cdot 1\$) + (100 \cdot 2\$) + (20 \cdot 2\$) + (30 \cdot 1\$) + (50 \cdot 1\$) + (10 \cdot 1\$) + (20 \cdot 2\$) + (100 \cdot 1\$) + (50 \cdot 1\$) = 570\$$$

5. Pokušati da pobošljamo postoje i raspored, tako da novi raspored ima opravdano dobar raspored odeljenja



Postoje i raspored:

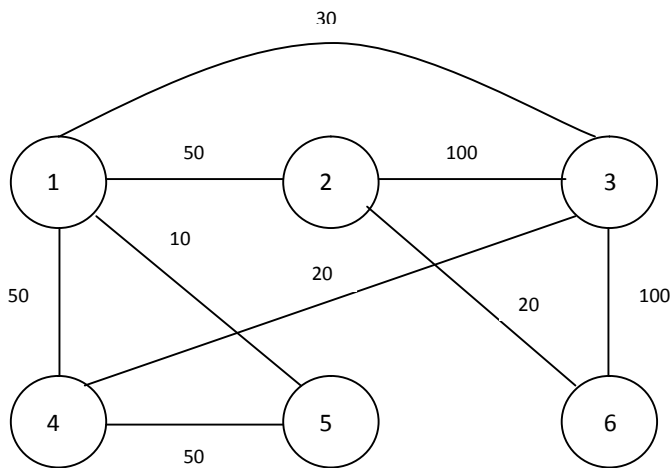


Posmatraju i tabelu sa protokom materijala i izraunate troškove, donosi se zaključak da treba smestiti odeljenja 1 i 3 jedno pored drugog. Zbog toga što se između njih postoji veliki protok materijala a ona se trenutno ne nalaze jedno pored drugog.

Jedna od mogućnosti je da se premeste odeljenja 1 i 2. Ovako je moguće smanjiti troškove na 480\$, što je ušteda od 90\$.

$$\text{Troškovi} = (50 \cdot 1\$) + (100 \cdot 1\$) + (20 \cdot 1\$) + (30 \cdot 2\$) + (50 \cdot 1\$) + (10 \cdot 1\$) + (20 \cdot 2\$) + (100 \cdot 1\$) + (50 \cdot 1\$) = 480\$$$

Novi raspored:



Ovo rešenje je samo jedno od mnogih. Za 6 odeljenja postoji 720 ( $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ) potencijalnih rasporeda. Kod ovakvih problema se retko nalaze optimalna rešenja, pa se zadovoljavamo „razumnim“ rešenjima koja dobijemo nakon nekoliko pokušaja. Pretpostavimo da je kompanija „Walters“ zadovoljna ovim rešenjem. Isteo je neophodan i šesti korak.

6. Nacrtati detaljan plan novog rasporeda odeljenja, tako da odeljenja odgovaraju obliku i veličini zgrade i njenim nepokretnim delovima.

U slučaju kompanije „Walters“ nema posebnih prostornih zahteva pa plan fabrike izgleda ovako:

Soba 1	Soba 2	Soba 3
Odeljenje 1	Odeljenje 2	Odeljenje 3
Odeljenje 4	Odeljenje 5	Odeljenje 6
Soba 4	Soba 5	Soba 6

Primer 2: Snow-Bird je mala bolnica, locirana na popularnom skijalištu u severnom Michiganu. Njen novi menadžer, Mari Lord, odlučila je da reorganizuje bolnicu koristeći metodu procesnog rasporeda koju je naučila tokom školovanja. Trenutni raspored osam departmana bolnice je prikazan na slici.

Ulaz	Ordinacija 1	Ordinacija 2	Rendgen	▲ 10' ↓
Laboratorija/ Testiranje/Ekg	Sala za operaciju	Soba za oporavak	Soba za osoblje	▲ 10' ↓

← 40' →

Jedino ograničenje je potreba da se zadrži postojeća lokacija ulaza i prijema pacijenata. Svi ostali departmani ili prostorije (svaka po 10 kvadratnih stopa) se mogu pomerati ako analiza rasporeda ukazuje da bi bilo delotvorno.

Merin prvi korak je da odredi broj putovanja pacijenata između departmana mesečno. Podaci su dati u tabeli. Lordova treba da odluči kako da postavi prostorije i da na taj način smanji ukupnu dužinu kretanja pacijenata između departmana:

$$\text{Minimizacija kretanja pacijenata: } \sum_{i,j} X_{ij} C_{ij}$$

gde je:

$X_{ij}$  = mesečan broj pacijenata (putovanja) koji se sele iz odeljenja  $i$  u odeljenje  $j$

$C_{ij}$  = razdaljina u stopama između odeljenja  $i$  i  $j$  (koji je, u ovom slučaju, ekvivalentan

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		100	100	0	0	0	0	0
2			0	50	20	0	0	0
3				30	30	0	0	0
4					20	0	0	20
5						20	0	10
6							30	0
7								0
8								

Departmani koji se nalaze jedan pored drugog, kao što su prostorija gde je ulaz i prijem pacijenata i prostorija za pregled 1, su udaljeni jedan od drugog 10 stopa, kao i departmani koji se nalaze dijagonalno. Ulaz i prostorija za pregled 2 su udaljene 20 stopa, a ulaz i rendgen 30 stopa. (Svakih 10 stopa predstavlja 10 novih jedinica).

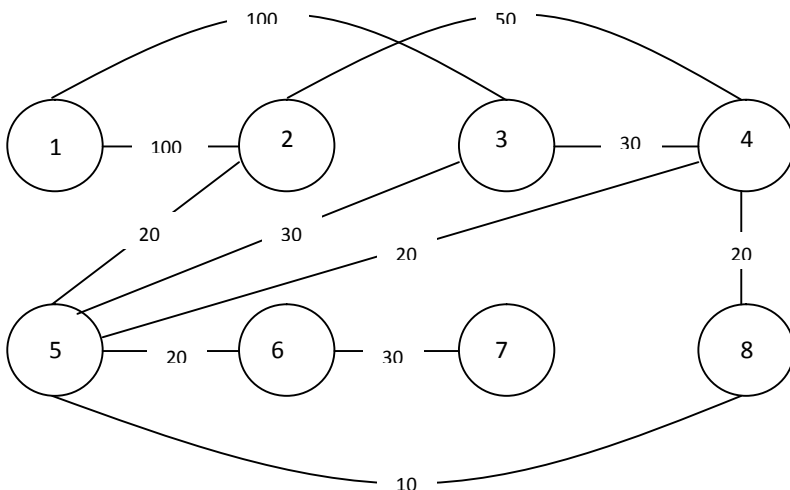
Pomoću datih informacija napraviti novi raspored u bolnici kako bi povećali efektivnost njenog rada.

Rešenje:

Prema početnom stanju troškovi kretanja su:

$$T = (100 \cdot 10') + (100 \cdot 20') + (50 \cdot 20') + (20 \cdot 10') + (30 \cdot 10') + (30 \cdot 20') + (20 \cdot 30') + (20 \cdot 10') + (20 \cdot 10') + (10 \cdot 30') + (30 \cdot 10') = 6700 \text{ stopa}$$

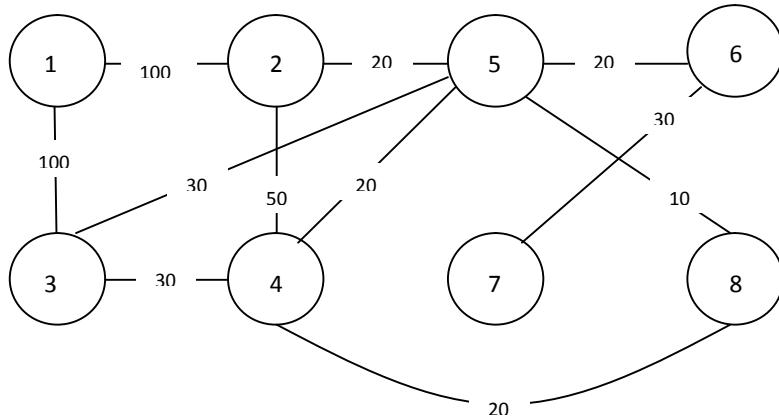
Šema postojećeg stanja



Nije moguće dokazati da je rešenje matematički optimalno, ali novi raspored bi trebao omogućiti smanjenje troškova. Dve korisne promene bi bile da se zamene mesta prostorijama 3 i 5 i prostorije 4 i 6. Ovo rešenje daje troškove

$$T = (100 \cdot 10') + (100 \cdot 10') + (50 \cdot 10') + (20 \cdot 10') + (30 \cdot 10') + (30 \cdot 20') + (20 \cdot 10') + (20 \cdot 20') + (20 \cdot 10') + (10 \cdot 10') + (30 \cdot 10') = 4800 \text{ stopa}$$

Šema novog stanja:

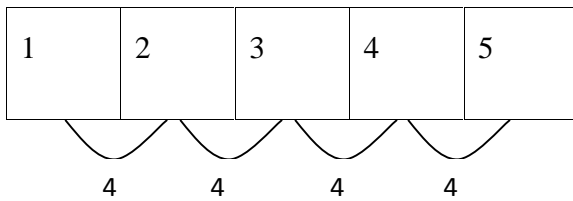


10.4. Upravo ste dobili posao direktora operacija za Bellas okolade, u Blaksburgu u Virdžiniji, snabdeva a okolade izuzetnog kvaliteta. 'Bellas okolade' razmatra dva mogu a rasporeda kuhinje za pravljenje recepata i odeljenja za testiranje/proveru. Strategija je da se omogu i najbolji mogu i kuhinjski raspored kako bi tehnolozi mogli da posvete svoje vreme i energiju u poboljšanju proizvoda, bez izgubljenog truda u kuhinji. Pitali su vas da ocenite ova dva kuhinjska rasporeda i da pripremite preporuku za vasesg šefa, Gospodina Bellas-a, kako bi on mogao da nastavi sa ugovaranjem kuhinjske gradnje.

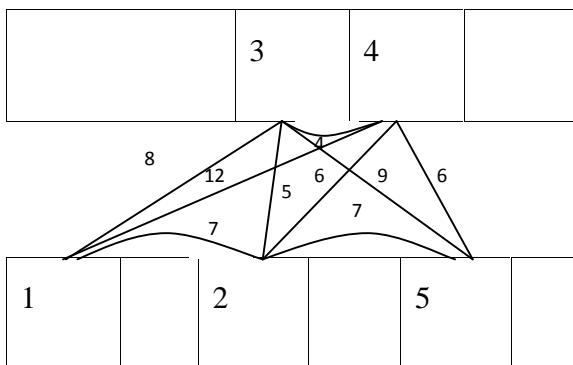
Broj putovanja izme u delova kuhinje:

	Frižider 1	Radna površina 2	Sudopera 3	Skladište 4	Šporet 5
Frižider 1	0	8	13	0	0
Radna površina 2	5	0	3	3	8
Sudopera 3	3	12	0	4	0
Skladište 4	3	0	0	0	5
Šporet 5	0	8	4	10	0

Raspored 1:



Raspored 2:



Rešenje: U tabeli su dati brojevi prelazaka od jedne radne stanice do druge:

	1	2	3	4	5
1		13	16	3	0
2			15	3	16
3				4	4
4					15
5					

Varijanta 1

$$T_1 = (13 \cdot 4) + (16 \cdot 8) + (3 \cdot 12) + (15 \cdot 4) + (3 \cdot 8) + (16 \cdot 12) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 8) + (15 \cdot 4) = 600$$

Varijanta 2

$$T_2 = (13 \cdot 7) + (16 \cdot 8) + (3 \cdot 12) + (15 \cdot 5) + (3 \cdot 6) + (16 \cdot 7) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 9) + (15 \cdot 6) = 602$$

Analizom mogu e dve varijante dolazimo do zaklju ka da je bolja prva varijanta, jer kada se uzme u obzir broj prelazaka od jedne do druge radne stanice i rastojanje izme u njih, dobijamo podatak da se manje napora uloži u kretanje po kuhinji varijante 1 u odnosu na drugu kuhinju.