Zadaci za vežbanje

Hibridna analiza

Zadatak 1.

Operacioni menadžer kompanije XY dobio je zadatak da izabere najbolju lokaciju za njihov novi pogon za proizvodnju sokova. Alternativne lokacije koje su na raspolaganju su: Beograd, Niš, Novi Sad, Kragujevac. Menadžment želi da u sistem donošenja odluka uključi 2 kritička, 2 objektivna i 3 subjektivna faktora (dato u tabeli). Težine subjektivnih faktora su takođe date u tabeli. Odrediti najbolju lokaciju ako subjektivni faktori imaju veću težinu za 30% od objektivnih faktora.

Alternativne lokacije	Kritički		Objektivni		Subjektivni		
	Pristupni prilazi	Poreske olakšice	Prihodi	Troškovi rada i energije	Karakteristike radne snage 0,5	Stav lokalne zajednice 0,3	Izgled lokacije 0,2
Beograd	1	1	200	50	0,4	0,6	0,8
Niš	1	1	180	90	0,9	0,8	0,6
Novi Sad	0	1	150	135	0,7	0,5	0,7
Kragujevac	1	0	190	90	0,8	0,6	0,4

Rešenje:

Obzirom da da kritički faktori moraju biti ispunjeni na svakoj lokaciji, lokacijska mera ne mora da se računa za lokacije Novi Sad i Kragujevac.

Da bi se dobila vrednost OFMi za svaku lokaciju i računa se najpre $\Sigma_j OF_{ij}$ za svaku lokaciju i.

$OF_{Beograd}$ = 50 – 200 = - 150

$OF_{Niš}$ = 90 –180 = - 90

$OF_{Novi\ Sad}$ = 135 –150 = - 15

$OF_{Kragujevac}$ = 90 –190 = -100

Minimum $\Sigma_j OF_{ij}$ je -150, a maksimum $\Sigma_j OF_{ij}$ je – 15.

$$OFM_i = \frac{\max_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right] - \sum_{i=1}^{q} OF_{ij}}{\max_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right] - \min_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right]}, i = 1,2,\ldots,m$$

$OFM_{Beograd}$ = (-15 – (-150))/(-15 – (-150)) = 135/135 = 1

$OFM_{Niš}$ = (-15 – (-90))/(-15 – (-150)) = 75/135 = 0,56

Za ostale ne mora da se računa.

$SFM_{Beograd}$ = 0,5*0,4 + 0,3*0,6 + 0,2*0,8 = 0,2 + 0,18 + 0,16 = 0,54

$SFM_{Niš}$ = 0,5*0,9 + 0,3*0,8 + 0,2*0,6 = 0,45 + 0,24 + 0,12 = 0,81

$$LM_i = CFM_i \cdot \left[\alpha \cdot OFM_i + (1-\alpha) \cdot SFM_i\right]$$

α+0,3 α = 1 α = 1/1,3 = 0,77

$LM_{Beograd}$ = 1*[0,77*1 + 0,23*0,54) = 0,77 + 0,12 = 0,89

$LM_{Niš}$ = 1*[0,77*0,56 + 0,23*0,81) = 0,43 + 0,19 = 0,62

Na osnovu lokacijske mere može se zaključiti da je najbolja lokacija Beograd.

Zadatak 2.

Operacioni menadžer kompanije Z koja se bavi distribucijom proizvoda kućne hemije dobio je zadatak da izabere najbolju lokaciju za njihov novi distributivni centar u Beogradu. Alternativne lokacije koje su na raspolaganju su: Šimanovci, Viline vode, Novi Beograd. Menadžment želi da u sistem donošenja odluka uključi 2 kritička, 2 objektivna i 2 subjektivna faktora (dato u tabeli). Težine subjektivnih faktora su takođe date u tabeli. Odrediti najbolju lokaciju ako subjektivni faktori imaju manju težinu za 20% od objektivnih faktora.

Alternativne lokacije	Kritički		Objektivni		Subjektivni	
	Pristupni prilazi	Infrastruktura	Prihodi	Troškovi rada i energije	Izgled lokacije 0,3	Stav lokalne zajednice 0,7
Šimanovci	1	1	150	30	0,4	0,8
Viline vode	1	1	180	80	0,8	0,7
Novi Beograd	1	1	160	45	0,9	0,3

Rešenje:

Obzirom da da kritički faktori moraju biti ispunjeni na svakoj lokaciji, lokacijska mera se računa za sve.

Da bi se dobila vrednost OFMi za svaku lokaciju i računa se najpre $\Sigma_j OF_{ij}$ za svaku lokaciju i.

$OF_{Šimanovci}$ = 30 – 150 = - 120

$OF_{Viline\ vode}$ = 80 –180 = - 100

$OF_{Novi\ Beograd}$ = 45 –160 = - 115

Minimum $\Sigma_j OF_{ij}$ je -120, a maksimum $\Sigma_j OF_{ij}$ je – 100.

$$OFM_i = \frac{\max_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right] - \sum_{i=1}^{q} OF_{ij}}{\max_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right] - \min_i\left[\sum_{j=1}^{q} OF_{ij}\right]}, i = 1,2,\ldots,m$$

OFM $_{Šimanovci}$ = (-100 – (-120))/(-100 – (-120)) = 20/20 = 1

OFM $_{Viline\ vode}$ = (-100 – (-100))/(-100 – (-120)) = 0/20 = 0

OFM $_{Novi\ Beograd}$ = (-100 – (-115))/(-100 – (-120)) = 15/20 = 0,75

SFM $_{Šimanovci}$ = 0,3*0,4 + 0,7*0,8 = 0,12 + 0,56 = 0,68

SFM $_{Viline\ vode}$ = 0,3*0,8 + 0,7*0,7 = 0,24 + 0,49 = 0,73

SFM $_{Novi\ Beograd}$ = 0,3*0,9 + 0,7*0,3 = 0,27 + 0,21 = 0,48

$$LM_i = CFM_i \cdot \left[\alpha \cdot OFM_i + (1-\alpha) \cdot SFM_i\right]$$

α+0,8 α = 1 α = 1/1,8 = 0,56

LM $_{Šimanovci}$ = 1*[0,56*1 + 0,44*0,68) = 0,56 + 0,30 = 0,86

LM $_{Viline\ vode}$ = 1*[0,56*0 + 0,44*0,73) = 0,32

LM $_{Novi\ Beograd}$ = 1*[0,56*0,75 + 0,44*0,48) = 0,42 + 0,21 = 0,63

Na osnovu lokacijske mere može se zaključiti da je najbolja lokacija Šimanovci.

(Korišćeno je matematičko zaokruživanje)

Problem prekrivanja skupa

Korak 1. Ako je Cj= 0 za svako j =1, 2,..., n,dodeliti jedinicu X_j= 1 i uklonti sva ograničenja u kojima se Xj pojavljuje sa koeficijentom +1.

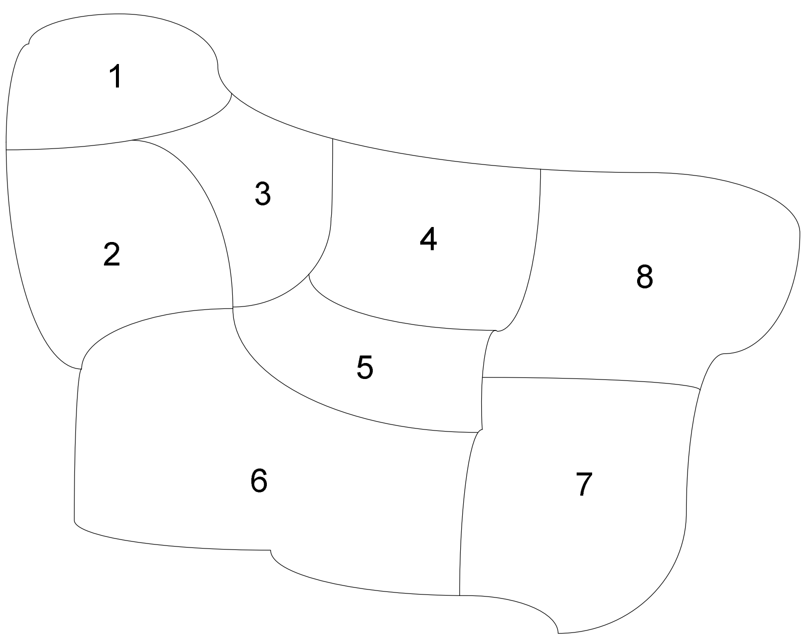
Korak 2. Ako je C_j > 0, za bilo koje j =1, 2, ... , ni X_j, se ne pojavljuje sa koeficijentom +1 ni u jednom preostalom ograničenju, dodeliti mu vrednost X_j =0.

Korak 3. Za sve preostale promenljive, utvrditi odnos cj/ dj, gde je dj broj ograničenja u kojima se xj pojavljuje sa koeficijentom +1. Promenljivoj k čiji je količnik Ck/dknajmanji, dodeliti xk=1 i ukloniti sva ograničenja u kojima se xkpojavljuje sa koeficijentom +1. Potom rešiti dobijeni model.

Korak 4. Ako nema više ograničenja, svim ostalim promenljivama dodeliti vrednost 0, što označava i rešenje problema. Ukoliko imajoš ograničenja, ići na korak 1.

Zadatak 1.

Trgovinsko preduzeće želi da otvori više maloprodajnih objekata na teritoriji grada Niša, sa namerom da pokrije svu teritoriju grada i da svaki klijent bude u mogućnosti da do njihovog objekta stigne u roku od 10 minuta. Grad Niš podeljen je na 8 gradskih blokova. Maloprodajni objekti mogu biti locirani u centar svakog bloka, a troškovi lociranja u svakoj zoni iznose 80, 50, 40, 95, 105, 90, 75, 100 hiljada novčanih jedinica. (ograničenje od 10 minuta podrazumeva da klijenti mogu da stignu za to vreme do centra svoje zone i do centara samo susednih zona)



Slika 1. Grad Niš podeljen na 8 blokova

Rešenje:

Formuliše se prvi model, tako što se najpre napravi matrica, a zatim i definiše funkcija cilja i ograničenja.

Matrica se pravi na osnovu slike.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	1	1	1	0	0	1
5	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	1	1	1	0
7	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	0	1	1

$\text{Min } F = 80*x_1+50*x_2+40*x_3+95*x_4+105*x_5+90*x_6+75*x_7+100*x_8$

p.o.

$x_1+x_2+x_3 \geq 1$

$x_1+x_2+x_3+ x_6 \geq 1$

$x_1+x_2+x_3+ x_4+ x_5 \geq 1$

$x_3+ x_4+ x_5 +x_8 \geq 1$

$x_3+ x_4+ x_5 +x_6 +x_7 +x_8 \geq 1$

$x_2+ x_5+ x_6 +x_7 \geq 1$

$x_5 +x_6 +x_7 +x_8 \geq 1$

$x_4 +x_5 +x_7 +x_8 \geq 1$

Obzirom da su svi troškovi cj>0 i da svi xj postoje u ograničenjima ide se na korak 3. (zaokruživati na dve decimale)

$c_1/d_1=80/3=26,67$ $c_5/d_5=105/6=17,50$

$c_2/d_2=50/4=12,50$ $c_6/d_6=90/4=22,50$

$c_3/d_3=40/5=8,00$ $c_7/d_7=75/4=18,75$

$c_4/d_4=95/4=23,75$ $c_8/d_8=100/4=25,00$

min ck/dk= 8,00 za k=3 Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja x_3 i x_3=1

Novi model

Min F = $80*x_1+50*x_2+95*x_4+105*x_5+90*x_6+75*x_7+100*x_8$

p.o.

$x_2+ x_5+ x_6 +x_7 \geq 1$

$x_5 +x_6 +x_7 +x_8 \geq 1$

$x_4 +x_5 +x_7 +x_8 \geq 1$

Svi troškovi su veći od nule i prelazi se na korak 2.

Korak 2. Obzirom da se X_1 javlja u funkciji cilja a nema ga u ograničenjima x_1=0

Korak 3.

c_2/d_2=50/1=50,00	c_6/d_6=90/2=45,00
c_4/d_4=95/1=95,00	c_7/d_7=75/3=25,00
c_5/d_5=105/3=35,00	c_8/d_8=100/2=50,00

min ck/dk= 25,00 za k=7 Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja x_7 i x_7=1

Novi model

Min F = $50*x_2+95*x_4+105*x_5+90*x_6+100*x_8$

p.o.

Kada se izbace ograničenja sa x_7 onda ne preostaje nijedno ograničenje i piše se

$x_2, x_4, x_5, x_6, x_8 \geq 0$ i $x_2= x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$

Konačno rešenje

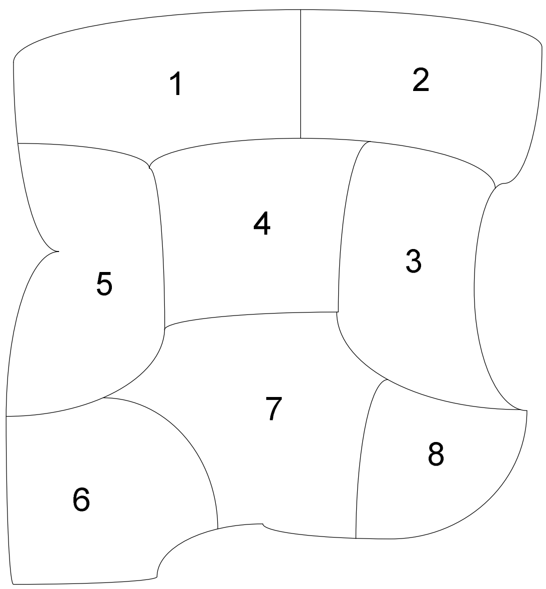
$x_3= x_7 = 1$ $x_1 = x_2= x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$

minF = 40+75=115

Maloprodajni objekti će biti smešteni u zonama 3 i 7 i troškovi lociranja objekata će iznositi 115 hiljada novčanih jedinica, i iz zone 3 će se snabdevati korisnici iz zona 1,2,3,4,5, a iz zone 7 korisnici iz zona 5,6,7 i 8. (ovaj deo se radi tako što se posmatraju treći i sedmi red iz matrice ili treće i sedmo ograničenje iz početnog modela).

Zadatak 2.

Trgovinsko preduzeće želi da otvori više maloprodajnih objekata na teritoriji grada Kragujevca, sa namerom da pokrije svu teritoriju grada i da svaki klijent bude u mogućnosti da do njihovog objekta stigne u roku od 5 minuta. Grad Kragijevac podeljen je na 8 gradskih blokova. Maloprodajni objekti mogu biti locirani u centar svakog bloka, a troškovi lociranja u svakoj zoni iznose 100, 50, 200, 40, 60, 80, 90, 150 hiljada novčanih jedinica. (ograničenje od 5 minuta podrazumeva da klijenti mogu da stignu za to vreme do centra svoje zone i do centara samo susednih zona)



Slika 1. Grad Kragujevac podeljen na 8 blokova

Rešenje:

Formuliše se prvi model, tako što se najpre napravi matrica, a zatim i definiše funkcija cilja i ograničenja.

Matrica se pravi na osnovu slike.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	1	0	1	0
5	1	0	0	1	1	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	1	0
7	0	0	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0	1	1

Min F = $100*x_1+50*x_2+200*x_3+40*x_4+60*x_5+80*x_6+90*x_7+150*x_8$

p.o.

$x_1+x_2+x_4+x_5 \geq 1$

$x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 1$

$x_2+x_3+x_4+x_7+x_8 \geq 1$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_7 \geq 1$

$x_1+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 1$

$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \geq 1$

$x_3+x_7+x_8 \geq 1$

Obzirom da su svi troškovi cj>0 i da svi xj postoje u ograničenjima ide se na korak 3. (zaokruživati na dve decimale)

$c_1/d_1=100/4=25{,}00$ $c_5/d_5=60/5=12{,}00$

$c_2/d_2=50/4=12{,}50$ $c_6/d_6=80/3=26{,}67$

$c_3/d_3=200/5=40{,}00$ $c_7/d_7=90/6=15{,}00$

$c_4/d_4=40/6=6{,}67$ $c_8/d_8=150/3=50{,}00$

min ck/dk= 6,67 za k=4 Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja x_4 i $x_4=1$

Novi model

Min F = $100*x_1+50*x_2+200*x_3+60*x_5+80*x_6+90*x_7+150*x_8$

p.o.

$x_5+x_6+x_7 \geq 1$

$x_3+x_7+x_8 \geq 1$

Svi troškovi su veći od nule i prelazi se na korak 2.

Korak 2. Obzirom da se X_1 i X_2 javlja u funkciji cilja a nema ga u ograničenjima $x_1= x_2=0$

Korak 3.

$c_3/d_3=200/1=200{,}00$ $c_7/d_7=90/2=45{,}00$

c_5/d_5=60/1=60,00 c_8/d_8=150/1=150,00

c_6/d_6=80/1=80,00

min ck/dk=45,00 za k=6 Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja x_6 i x_6=1

Novi model

Min F = $200*x_3+60*x_5+90*x_7+150*x_8$

p.o.

$x_3 + x_7 + x_8 \geq 1$

Korak 2. Pošto x_5 postoji u funkciji cilja, a nema ga u ograničenjima onda je x_5=0.

Korak 3.

c_3/d_3=200/1=200,00 c_7/d_7=90/1=90,00 c_8/d_8=150/1=150,00

min ck/dk=90,00 za k=7 Dakle, ukloniti sva ograničenja gde se javlja x_7 i x_7=1

Novi model

Min F = $200*x_3+60*x_5+150*x_8$

p.o.

Kada se izbace ograničenja sa x_7 onda ne preostaje nijedno ograničenje i piše se

$x_3, x_5, x_8 \geq 0$ i $x_3 = x_5 = x_8 = 0$

Konačno rešenje

$x_4 = x_6 = x_7 = 1$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_8 = 0$

min F = 40+80+90=210

Maloprodajni objekti će biti smešteni u zonama 4, 6 i 7 i troškovi lociranja objekata će iznositi 210 hiljada novčanih jedinica, i iz zone 4 će se snabdevati korisnici iz zona 1,2,3,4,5 i 7, iz zone 6 korisnici iz zona 5,6 i 7 i iz zone 7 korisnici iz zona 3,4,5,6,7 i 8. (ovaj deo se radi tako što se posmatraju četvrti, šesti i sedmi red iz matrice ili četvrto, šesto i sedmo ograničenje iz početnog modela).

2. REŠAVANJE VEBEROVOG PROBLEMA SA PRAVOUGAONOM METRIKOM

U urbanim sredinama Euklidova metrika kojom se određuje direktno rastojanje između novih i postojećih tačaka je često neprimenljiva. U gradskim uslovima ulice kojima se kreću vozila se uglavnom seku pod pravim uglom. Zato se javlja potreba za rešavanje Veberovog problema pravougaonom metrikom.

Potrebno je rešiti sledeći problem:

$$(\min)_{I=1}^{m} f(x) = \sum_{I=1}^{m} w_i d_i(x) = \sum_{I=1}^{m} w_i(|x_1-a_1^i|+|x_2-a_2^i|) = \sum_{I=1}^{m} w_i|x_1-a_1^i|+ \sum w_i|x_2-a_2^i|$$

$$(\min)\ f(x) = f_1(x_1)+ f_2(x_2)$$

Na taj način rešavanje problema sa dve promenljive svededeno je na rešavanje dva nezavisna zadatka sa po jednom promenljivom. Prvo se rešava problem za jednu koordinatu: (min) $f_1(x_1)$ odakle se dobija x_1^*, a zatim za drugu: (min) $f_2(x_2)$ odakle se dobija x_2^*. Tačka $X^*=(x_1^*,x_2^*)$ predstavlja rešavanje polaznog Veberovog problema.

Ako su zadate tačke $A_i=(a_1^i,a_2^i)$ i težinski koeficijenti tih tačaka w_i, i=1,..,m algoritam za određivanje j-te coordinate je:

1.Sortirati koordinate tačaka A_i, i= 1, ..m u neopadajući niz. Dalje se predpostavlja da ideks (i) raste po sortiranom redosledu: $aj^1 \le a_j^2 \le \ldots \le a_j^m$. Moguća su dva slučaja:

2.Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i < \sum_{i=1}^{k} w_i$ pri čemu za k=1 leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $x_j^* = a_j^k$.

3. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$ tada je rešenje višestruko, tj. tražena koordinata x_j^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[a_j^k,a_j^{k+1}]$.

Primenjujući ovaj algoritam za j=1, a potom za j=2 dobijaju se obe koordinate tačke X*.

<u>**Zadatak 1:**</u> U jednoj opštini se nalazi četiri naseljena mesta. Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz sva četiri naselja. Lokacije mesta (koordinate u kilometrima) su $A_1(4,4)$,

$A_2(3,1)$,$A_3(6,4)$,$A_4(6,2)$. Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole tako da ukupan put svih đaka od kuće do škole bude minimalan. Ako su težine tačaka redom $w_1=4$, $w_2=1$.$w_3=2$,$w_4=3$ rešiti zadatak koristeći pravougaonu metriku.

Rešenje:

Koordinata x_1: Sortiraju se tačke po prvoj koordinati I posmatramo njihove težine.

Koordinate (a_1^j) : 3, 4, 6, 6

Težine (w_j) : 1, 4, 2, 3

k : 1, 2, 3, 4

$\sum_{i=1}^{k} w_i$: 1, 5, 7, 10

Pošto je $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} w_i = 5$,za k=2 je zadovoljen uslov da je $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$. Znači koordinata x_1^*

može imati bilo koju vrednost između 4 i 6, tj. $4 \leq x_1^* \leq 6$.

Koordinata x_2: Na isti način se sortiraju tačke po drugoj koordinati:

Koordinate (a_2^j) : 1, 2, 4, 4

Težine (w_j) : 1, 3, 2, 4

k : 1, 2, 3, 4

$\sum_{i=1}^{k} w_i$: 1, 4, 6, 10

Važi da je $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i < \sum_{i=1}^{k} w_i$ za k=3 odnosno $x_2^* = a_2^3 = 4$. Ovaj zadatak ima beskonačno

mnogo rešenja,tj. $X^* = (x_1^*, 4)$, gde je x_1^* pripada skupu [4,6].

Zadatak 2. Rešiti Veberov problem koristeći pravougaonu metriku.

Lokacije		L1	L2	L3	L4	L5	L6
Koordinate	X	500	400	200	500	300	100
	Y	200	300	400	500	100	200
Težinski koeficijenti		0.08	0.04	0.22	0.10	0.12	0.44

Rešenje:

j=1 odnosno x koordinata

1.Sortirati koordinate tačaka A_i, i= 1, ..m u neopadajući niz

a_1^i	100	200	300	400	500	500
w_i	0.44	0.22	0.12	0.04	0.08	0.10
$\sum w_i$	0.44	0.66	0.78	0.82	0.9	1

$1/2\sum w_i=0.5$ to j između 100 i 200 pošto je $0.44<0.5<0.66$ za $k=2$ što znači $X^*=200$

za $j=2$ odnosno y

A_2^i	100	200	200	300	400	500
w_i	0.12	0.08	0.44	0.04	0.22	0.10
$\sum w_i$	0.12	0.20	0.64	0.68	0.90	1

$0.20<0.5<0.64$ $k=3$ $Y^*=200$

3. VAJSFELDOV ALGORITAM ZA REŠAVANJE VEBEROVOG PROBLEMA

Veberov problem Euklidove metrike nije moguće rešiti analitički. Zato se često koristi Vajsfeldov algoritam kojim se dobija približno rešenje Veberovog problema.
Dato je m tačaka $A_i = (a_1^i, a_2^i)$, njihove težine w_i, i=1,....,m i koeficijent kriterijuma zaustavljanja numeričkog postupka $\varepsilon > 0$. Potrebno je odrediti lokaciju (koordinate) nove tačke koristeći kao kriterijum sumu otežanjih rastojanja (*minisum* problem).
Pošto se zna da ovaj algoritam jako sporo konvergira kada se optimalno rešenje poklapa sa jednom od zadatih tačaka, najpre se proverava da li je neka od postojećih tačaka optimalna lokacija za novi objekat. Ako se utvrdi da nije, prelazi se na iterativni deo algoritma:

1. Izračunati međusobna rastojanja između svih m tačaka:

$$d(A_r,A_l) = \sqrt{(a_1^r-a_1^l)^2 + (a_2^r-a_2^l)^2}\ ,\ \forall\, r\ ,\ l \in \{1,..,m\}$$

2. Proveriti da li za neku tačku r koja pripada skupu {1,..m} važi:

$$c_r = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2} \leqslant w_r$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neko r=> KRAJ. Rešenje se nalazi u tački A_r. U suprotnom, ići na sledeći korak.

3.Stavimo da je k = 0 i odredimo početno rešenje $X^0 = (x_1^0,x_2^0)$ po formuli:

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}\quad ,\ j = 1,\ 2$$

4.Izračunati rastojanja između X^k = (x1k, x2k) i zadatih tačaka:

$$d(X^k,A_i) = \sqrt{(x_1^k-a_1^i)^2 + (x_2^k-a_2^i)^2}\ ,\ \forall\ i \in \{1,..,m\}$$

5.Računamo po iterativnoj formuli:

$$x_j^{k+1} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_j^i}{d(X^k, A_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(X^k, A_i)}} \quad , \; j = 1, 2$$

6. Ako je $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$, za svako j koje pripada skupu {1,2} => KRAJ. X^{k+1} se usvaja kao ''dovoljno dobro'' rešenje. U suprotonom, staviti k=k+1 i ići na korak 4.

Zadatak 3: Date su koordinate i težinski koeficijenti za četiri tačke. Potrebno je odrediti koordinate nove tačke čija će suma otežanih rastojanja od zadatih tačaka biti minimalna. Koristiti Euklidovu metriku, a za koeficijent kriterijuma zaustavljanja uzeti ε=0,05. (slika 1.)

$A_1(4,4)$, $w_1=4$ $A_2(3,1)$, $w_2=1$ $A_3(6,4)$, $w_3=2$ $A_4(6,2)$, $w_4=4$

Rešenje: 1) Određujemo međusobna rastojanja zadatih tačaka:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

$$d(A_1, A_3) = \sqrt{(6-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(A_1, A_4) = 2{,}828$$

$$d(A_2, A_3) = 4{,}243$$

$$d(A_2, A_4) = 3{,}162$$

$$d(A_3, A_4) = 2$$

2) Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih tačaka: proverava se da li je cr<=wr

$c_1=[(1(4-3)/3,162 + 2(4-6)/2 + 4(4-6)/2,828))^2 + (1(4-1)/3,162 + 2(4-4)/2 + 4(4-2)/2,828)^2]^{1/2} = 5,884 \geq 4$

$c_2= [(4(3-4)/3.162 + 2(3-6)/4.243 + 4(3-6)/3.162))^2 + (4(1-4)/3.162 + 2(1-4)/4.243 + 4(1-2)/3.162)^2]1/2= [(-1.265-1.414-3.795)^2 + (-3.795 -1.414 -0.316)^2]^{1/2} = [41.91+86.86]^{1/2} = 11.34$ ili $9,155 > 1$

$c_3=6,657 > 2$

$c_4=9,884 > 4$

Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih tačaka. Prelazimo na iterativni deo.

3) Određujemo početno rešenje X^0:

$x_1^0 = (4*4 + 1*3 + 2*6 + 4*6)/(4+1+2+4) = 5$
$x_2^0 = (4*4 + 1*1 + 2*4 + 4*2)/(4+1+2+4) = 3$
4) Izračunajmo rastojanja od početnog rešenja do zadatih tačaka:

$$d(X^0, A_1) = \sqrt{(5-4)^2 + (3-4)^2} = 1{,}414$$

$$d(X^0, A_2) = 2{,}828$$

$$d(X^0, A_3) = 1{,}414$$

$$d(X^0, A_4) = 1{,}414$$

5) Određivanje novog rešenja X^1:

$x_1^1 =$ 5,0952
$x_2^1 =$ 3,0952

6) Proverava se da li je ispunjen kriterijum zaustavljanja :
|5-5.095| = 0.095 >e dakle mora nova iteracija moraju biti zadovoljena i x1 i x2 <e

4) Računa se rastojanje između nove tačke (5.0952;3.0952) i zadatih tačaka

$$d(X^1, A_1) = 1{,}421$$

$$d(X^1, A_2) = 2{,}936$$

$$d(X^1, A_3) = 1{,}275$$

$$d(X^1, A_4) = 1{,}421$$

5)Određivanje novog rešenja

$x_1^2 =$ 5,118

$x_2^2 =$ 3,118

6) $|5{,}0952 - 5{,}118| = 0{,}023 < \varepsilon$
$|3{,}0952 - 3{,}118| = 0{,}023 < \varepsilon$
=>KRAJ

Zaključak: $\bar{X} = (5{,}118 , 3{,}118)$ je ‘’dovoljno dobro’’ rešenje zadatka.

Zadatak 4. U jednoj opštini se nalaze četiri naseljena mesta.Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz sva četiri naselja. Da bi se odredila lokacija nove škole, u obzir se uzimaju položaji tih naselja i broj stanovnika (smatra se da je broj đaka proporcionalan broju stanovnika). Lokacije mesta (koordinate zadate u kilometrima) i broj stanovnika (u hiljadama) je dat u sledećoj tabeli.

Mesta:	M1	M2	M3	M4
X	3	8	10	12
Y	7	1	5	1
Broj stanovnika	80	30	25	40

Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole, tako da ukupan put svih đaka od kuće do škole bude minimalan. Smatra se da je put od naselja do škole pravolinijski i da je rezultat dovoljno dobar ako je razlika obe koordinate između dve uzastopne iteracije manja od 20 metara.

Rešenje: Na osnovu teksta zadatka se zaključuje da se radi o Veberovom problem i Euklidovoj metrici, dakle primenićemo Vajsfeldov algoritam s tim da je ϵ=0.02 km

1. Određujemo međusobna rastojanja između zadatih tačaka:
   d(M1,M2)= =7.810
   d(M1,M3) = =7.28
   d(M1,M4) = =10.817
   d(M2,M3) = =4.472
   d(M2,M4) = =4.0
   d(M3,M4) = =4.472

2. Proveravamo da li je rešenje u nekoj od zadatih tačaka:

c1= c1=92.88>80

c2= c2=83.82>30

c3= c3=83.07>25

c4= c4=126.7>40

Rešenje se ne nalazi ni u jednoj od zadatih tačaka. Prelazi se na iterativni deo.

3. Određuje se početno rešenje x^0:

$x1^0$= =6.914 $X2^0$= =4.314

4. Izračunava se udaljenost od početnog rešenja do zadatih tačaka:

d(x^0, M1) = =4.747

$d(x^0, M2) =$ $=3.488$
$d(x^0, M3) =$ $=3.161$
$d(x^0, M4) =$ $=6.070$

5. Određivanje novog rešenja:

$X1^1=$ $=6.947$ $X2^1=$ $=4.323$

6. Pošto je |6.914-6.947| = 0.033>e sledi k=1, nova iteracija.

4. $d(x^1, M1) =$ $=4.769$
$d(x^1, M2) =$ $=3.486$
$d(x^1, M3) =$ $=3.128$
$d(x^1, M4) =$ $=6.048$

5. $X1^2 =$ $=6.964$ $X2^2=$ $=4.317$

7. |6.947-6.964| = 0.017 < e
|4.323-4.317| = 0.006<e sledi kraj Dakle, za lokaciju gradnje škole se usvaja tačka (6,964 ; 4,317)

RASPORED

Primer 1.

Menadžment kompanije „Walters“ želi da rasporedi 6 odeljenja svoje fabrike tako da smanji troškove prenosa materijala između odljenja. Polazna pretpostavka (kako bi se olakšao problem) je da je svako odeljenje veličine 20x20 stopa, a da je zgrada fabrike dužine 60 stopa i široka 40 stopa. Koraci procesa koji se slede za rešavanja problema su:

1. Oformiti matricu koja pokazuje protok materijala između odeljenja

	1	2	3	4	5	6
1		50	100	0	0	20
2			30	50	10	0
3				20	0	100
4					50	0
5						0
6						

2. Odrediti prostorne zahteve za svako odeljenje
3. Nacrtati početnu šemu rasporeda odljenja i puteve prenosa materijala. Pokušati da rasporedimo odeljenja sa većim protokom materijala jedno do drugog.
4. Odrediti troškove rasporeda koristeći formulu:

$$\text{Troškovi} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, c_{ij}$$

Za ovaj problem kompanija „Walters“ pretpostavlja da se sav transport materijala obavlja pomoću viljuškara. troškovi prenosa tereta između dva odeljenja, koja se nalaze jedno pored drugog je procenjeno na 1$. Prenos izmedju odeljenja koja se ne nalaze jedno pored drugog iznosi 2$.

Troškovi = (50*1$) + (100*2$) + (20*2$) + (30*1$) + (50*1$) + (10*1$) + (20*2$) + (100*1$) + (50*1$) = 570$

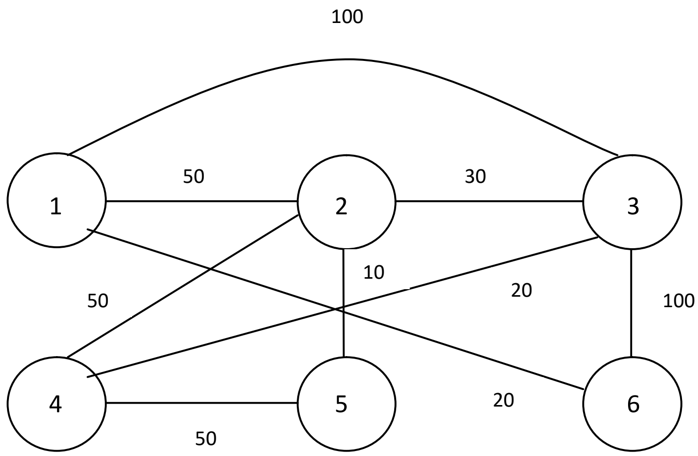
5.Pokušati da pobošljamo postojeći raspored, tako da novi raspored ima opravdano dobar raspored odeljenja

Soba 1	Soba 2	Soba 3
Odeljenje 1	Odeljenje 2	Odeljenje 3
Odeljenje 4	Odeljenje 5	Odeljenje 6
Soba 4	Soba 5	Soba 6

40

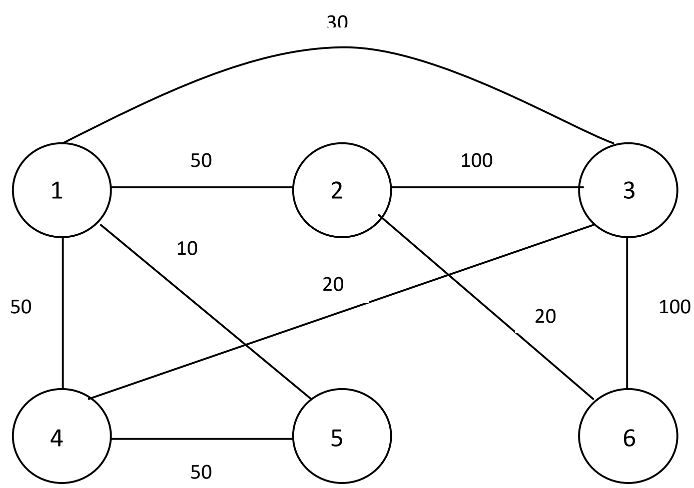
50'

Postojeći raspored:



Posmatrajući tabelu sa protokom materijala i izračunate troškove, donosi se zaključak da treba smestiti odeljenja 1 i 3 jedno pored drugog. Zbog toga što se između njih postoji veliki protok materijala a ona se trenustno ne nalaze jedno pored drugog.
Jedna od mogućnosti je da se premeste odeljenja 1 i 2. Ovako je moguće smanjiti troškove na 480$, što je ušteda od 90$.
Troškovi = (50*1$) + (100*1$) + (20*1$) + (30*2$) + (50*1$) + (10*1$) + (20*2$) + (100*1$) + (50*1$) = 480$

Novi raspored:



Ovo rešenje je samo jedno od mnogih. Za 6 odeljenja postoji 720 (6!= 6*5*4*3*2*1) potencijalnih rasporeda. Kod ovakvih problema se retko nalaze optimalna rešenja, pa se zadovoljavamo „razumnim“ rešenjima koja dobijemo nakon nekoliko pokušaja. Pretpostavimo da je kompanija „Walters“ zadovoljna ovim rešenjem. Često je neophodan i šesti korak.

6.Nacrtati detaljan plan novog rasporeda odeljenja, tako da odeljenja odgovaraju obliku i veličini zgrade i njenim nepokretnim delovima.

U slučaju kompanije „Walters“ nema posebnih prostornih zahteva pa plan fabrike izgleda ovako:

Soba 1	Soba 2	Soba 3
Odeljenje 1	Odeljenje 2	Odeljenje 3
Odeljenje 4	Odeljenje 5	Odeljenje 6
Soba 4	Soba 5	Soba 6

Primer 2: Snow-Bird je mala bolnica, locirana na popularnom skijalištu u severnom Mičigenu. Njen novi menadžer, Mari Lord, odlučila je da reorganizuje bolnicu koristeći metodu procesnog rasporeda koju je naučila tokom školovanja. Trenutni raspored osam departmana bolnice je prikazan na slici.

Ulaz	Ordinacija 1	Ordinacija 2	Rendgen	10'
Laboratorija/ Testiranje/Ekg	Sala za operaciju	Soba za oporavak	Soba za osoblje	10'

40'

Jedino ograničenje je potreba da se zadrži postojeća lokacija ulaza i prijema pacijenata. Svi ostali departmani ili prostorije (svaka po 10 kvadratnih stopa) se mogu pomerati ako analiza rasporeda ukazuje da bi bilo delotvorno.

Merin prvi korak je da odredi broj putovanja pacijenata između departmana mesečno. Podaci su dati u tabeli. Lordova treba da odluči kako da postavi prostorije i da na taj način smanji ukupnu dužinu kretanja pacijenata između departmana:

Minimizacija kretanja pacijenata: $\sum \sum Xij\ Cij$

gde je:

Xij= mesečan broj pacijenata (putovanja) koji se sele iz odeljenja *i* u odeljenje *j*

Cij = razdaljina u stopama između odeljenja i i j (koji je, u ovom slučaju, ekvivalentan

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		100	100	0	0	0	0	0
2			0	50	20	0	0	0
3				30	30	0	0	0
4					20	0	0	20
5						20	0	10
6							30	0
7								0
8								

Departmani koji se nalaze jedan pored drugog, kao što su prostorija gde je ulaz i prijem pacijenata i prostorija za pregled 1, su udaljeni jedan od drugog 10 stopa, kao i departmani koji se nalaze dijagonalno. Ulaz i prostorija za pregled 2 su udaljene 20 stopa, a ulaz i rendgen 30 stopa. (Svakih 10 stopa predstavlja 10 novčanih jedinica).

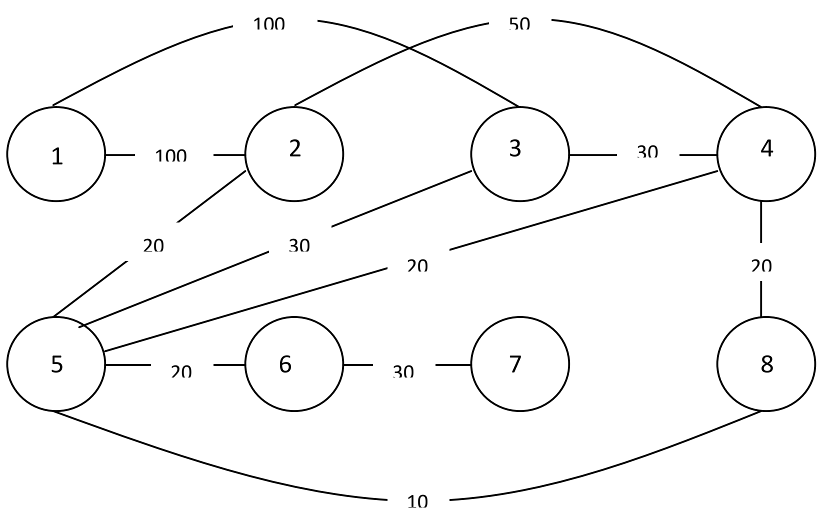
Pomoću datih informacija napraviti novi raspored u bolnici kako bi povećali efektivnost njenog rada.

Rešenje:

Prema početnom stanju troškovi kretanja su:

T= (100*10') + (100*20') + (50*20') + (20*10') + (30*10') + (30*20') + (20*30') + (20*10') + (20*10’) + (10*30’) + (30*10’) = 6700 stopa

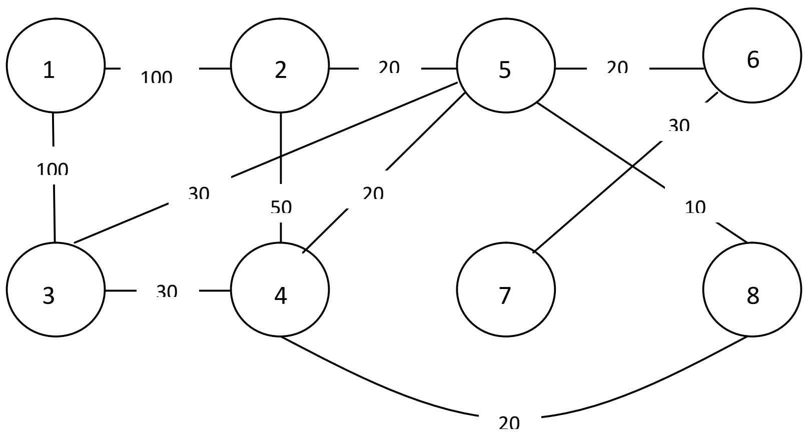
Šema postojećeg stanja



Nije moguće dokazati da je rešenje matematički optimalno, ali novi raspored bi trebao da omogući smanjenje troškova. Dve korisne promene bi bile da se zamene mesta prostorijama 3 i 5 i prostorije 4 i 6. Ovo rešenje daje troškove

T= (100*10') + (100*10') + (50*10') + (20*10') + (30*10') + (30*20') + (20*10') + (20*20') + (20*10’) + (10*10’) + (30*10’) = 4800 stopa

Šema novog stanja:

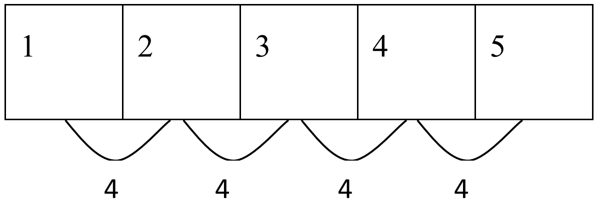


10.4.Upravo ste dobili posao direktora operacija za Bellas čokolade, u Blaksburgu u Virdžiniji, snabdevača čokolade izuzetnog kvaliteta. 'Bellas čokolade' razmatra dva moguća rasporeda kuhinje za pravljenje recepata i odeljenja za testiranje/proveru. Strategija je da se omogući najbolji mogući kuhinjski raspored kako bi tehnolozi mogli da posvete svoje vreme i energiju u poboljšanju proizvoda, bez izgubljenog truda u kuhinji. Pitali su vas da ocenite ova dva kuhinjska rasporeda i da pripremite preporuku za vaseg šefa, Gospodina Bellas-a, kako bi on mogao da nastavi sa ugovaranjem kuhinjske gradnje.

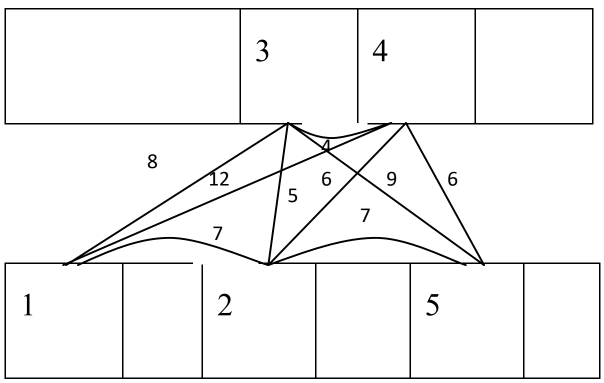
Broj putovanja između delova kuhinje:

	Frižider 1	Radna površina 2	Sudopera 3	Skladište 4	Šporet 5
Frižider 1	0	8	13	0	0
Radna površina 2	5	0	3	3	8
Sudopera 3	3	12	0	4	0
Skladište 4	3	0	0	0	5
Šporet 5	0	8	4	10	0

Raspored 1:



Raspored 2:



Rešenje: U tabeli su dati brojevi prelazaka od jedne radne stanice do druge:

	1	2	3	4	5
1		13	16	3	0
2			15	3	16
3				4	4
4					15
5					

Varijanta 1

T_1= (13*4) + (16*8) + (3*12) + (15*4) + (3*8) + (16*12) + (4*4) + (4*8) + (15*4) = 600

Varijanta 2

T_2= (13*7) + (16*8) + (3*12) + (15*5) + (3*6) + (16*7) + (4*4) + (4*9) + (15*6) = 602

Analizom moguće dve varijante dolazimo do zaključka da je bolja prva varijanta, jer kada se uzme u obzir broj prelazaka od jedne do druge radne stanice i rastojanje između njih, dobijamo podatak da se manje napora uloži u kretanje po kuhinji varijante 1 u odnosu na drugu kuhinju.