

LOKACIJA I RASPORED OBJEKATA

- sažetak materijala za predmet Lokacija i raspored objekata -

Materijal je nastao spajanjem dve knjige:

Lokacija i projektovanje objekata, autora Zorana Radojevića, Dragane Stojanović i Miroslava Radojevića, i

Kontinualni lokacijski modeli – autora Nenada Mladenovića

Beograd, 2015.

I DEO

1. LOKACIJA OBJEKATA

Usled naučno-tehnološkog progresa i napredovanja industrije javila se potreba za proširenjem kapaciteta postojećih industrijskih objekata. Sa druge strane, konkurencija je sve veća, rastu potrebe kupaca i dolazi do stalnog širenja tržišta. Zbog navedenih promena u društvu, lokacija objekata je postala značajan faktor u poslovanju.

Lokacija utiče i na svakodnevni život i budućnost čoveka, a ne samo preduzeća. Različiti faktori utiču na strukturiranje industrije, kao što su: konkurentno okruženje, regulative sa kojima se suočavaju preduzeća, tehnologije koje mogu da se usvoje. Svi navedeni faktori utiču da se na određenom području razvije određeni tip industrije.

Zato je znanje o lokacijama neophodno za sve koji smatraju da će naći posao u poslovnom društvu ili započeti sopstveni biznis.

Lokacija industrije i objekata ima ekonomske, ali i socijalne posledice. Industrijske promene su stalne i utiču na promene u društvu. Zato je značajno pratiti promene i izučavati uticaj lokacija industrije na društvo.

Preduzeća na određenoj lokaciji moraju da ispune dva zahteva. Na primeru banke, prvi se odnosi na samu banku, da li banka može da obezbedi usluge koje klijenti žele i koje će klijenti ceniti dovoljno da plate po ceni koja će pokriti troškove? A drugi je: Da li će to moći da ostvari na određenom mestu i na odgovarajući način?

Ukoliko je u pitanju proizvodnja: Da li proizvođač može da napravi proizvode određenog tipa koji će imati odgovarajuću cenu na tržištu? I da li to može da ostvari na određenom mestu?

U oba slučaja se kao problem javlja lokacija za obavljanje delatnosti. Na primer, banka može da zadrži potrošače, ako je locirana na odgovarajućem mestu i može da zadrži radnu snagu, samo ako oni mogu da dođu i odu sa radnog mesta na odgovarajući način. Proizvodne fabrike imaju obavezu da nabave sirovine dobrog kvaliteta u odgovarajućem vremenu, da isporuče proizvode na odgovarajuće lokacije na tržištu u odgovarajućem vremenu, dobrog kvaliteta i sa niskim troškovima i obavezno održavanja radne snage koja je produktivna i može adekvatno da dođe i ode sa radnog mesta.

To su veoma važne obaveze preduzeća, imajući u vidu stalne promene okruženja i nepredvidivost sa kojima se tehnologija, tržište i ljudi menjaju.

Lokacija pomaže u definisanju organizacije i razlikuje organizacije međusobno. Lokacija je veoma značajan faktor pri izboru banke od strane klijenta. Klijent bira banku najčešće prema poređenju lokacija prostorija banke i automata sa svakodnevnom putanjom do posla, škole ili prodavnice. Ako se pretpostavi da banka ne poseduje filijale ni automate, već sklapa ugovore sa drugim bankama da koristi automate bez naknade klijenta, banka će imati veliki broj automata, ali se teško dolazi do matične zgrade banke. Banka ima velike troškove kada klijenti podižu svakodnevno male iznose sa automata, a njegovo korišćenje plaća banka, a ne klijent. Banka mora da razradi dobru lokacionu strategiju automata, kako bi smanjila troškove, odnosno da odredi proviziju koju plaća klijent u zavisnosti od lokacije automata i frekvencije pružanja usluga automata.

Slične tome, razvija se i mreža proizvodnih i distributivnih centara u zavisnosti od troškova i tržišta koje se opslužuje.

Izbor lokacije predstavlja značajnu investicionu odluku, koja se zasniva na analizi postojećih snaga i budućih uslova okruženja.

Zato je znanje o izboru lokacije neophodno, i u narednim poglavljima će biti detaljnije objašnjen postupak izbora lokacije.

1.1 Teorija izbora lokacije

Sa razvojem teorije menadžmenta, razvijale su se uporedo i različite teorije izbora lokacije. Razvoj menadžmenta se odvijao kroz veliki broj škola, od kojih se izdvajaju sledeće:

1. klasična teorija (škola);
2. bihejvioristička;
3. sistemska. [18]

Slične škole (pristupi) su bile karakteristične i za teoriju izbora lokacije. Problemi izbora lokacije su počeli da izazivaju pažnju početkom 19. veka. Prvi koreni teorije o lokaciji su potekli iz Nemačke, kada je Johan von Thunen 1826. godine pokušao da odredi optimalnu lokaciju za poljoprivredne useve. Zatim se, nekoliko godina kasnije, Albert Schaffle bavio problemima industrijske lokacije, odnosno lokacijom proizvodnih objekata. Presudni faktor u izboru bila je razdaljina gradova (stambenih područja) od tržišta. Celokupnu teoriju lokacije je prvi dao Alfred Weber, koji ukazuje na značaj troškova pri izboru lokacije. Sve navedene teorije spadaju u klasičnu školu i uzimaju obzir samo mali broj određenih, isključivih faktora i uvode brojne pretpostavke. Zato su se javile neoklasične teorije koje predstavljaju poboljšanja poznatih, klasičnih teorija, jer uvode u razmatranje veći broj faktora. U klasičnim i neoklasičnim teorijama smatralo se da je čovek "neljudsko biće" i da su mu poznate sve informacije. Kao reakcija na prethodne pristupe razvila se bihejvioristička teorija, koja uzima u obzir ljudski faktor i opažanje u izboru lokacije.

Može se zaključiti da postoje tri osnovne teorije u ovoj disciplini:

1. klasička teorija;
2. neoklasična;
3. bihejvioristička.

Pored navedenih teorija, u novije vreme javljaju se još dva pristupa: institucionalni i evolutivni, koji nisu u potpunosti razvijeni.

U narednim poglavljima će biti detaljnije objašnjene prethodno nabrojane teorije i pristupi.

1.1.1 Klasična teorija

Klasična teorija lokacije se razvila u 19. veku i predstavlja preteču ostalim teorijama. Kod klasične teorije, akcenat je prilikom izbora lokacije, na smanjivanju troškova. Troškovi su presudni faktor koji utiče na izbor.

Prvi autor u klasičnoj teoriji je bio Johan Van Thunen koji je 1826. godine proučavao korišćenje poljoprivrednog zemljišta. Van Thunen je bio nemački agrukulturolog poznat po svom radu na odnosu između troškova transporta robe i lokacije proizvodnje. Teorija se bazira na poljoprivrednom preduzetniku koji želi da maksimizira profit. [23] Kako bi se povećao profit, potrebno je da razlika između tržišne cene i proizvodnih i transportnih troškova bude optimalna. Kreirao je model za optimalno korišćenje poljoprivrednog zemljišta sa ciljem da troškovi transporta do tržišta budu minimalni. Zamislio je izolovan grad u centru glatke i ravnomerno raspoređene ravni bez plovnih vodenih površina i ograničen divljinom. Koristio je ovaj model da demonstrira metod maksimiziranja poljoprivredne proizvodnje u koncentričnim zonama. Masovni i kvarljivi proizvodi će se proizvoditi blizu grada, dok će se lakši i izdržljiviji proizvodi proizvoditi na periferiji. [73]

Uvedene su sledeće pretpostavke u model:

- postoji jedno glavno tržište i savršena konkurencija;
- tržišna cena je fiksna;
- transportni troškovi su srazmerni daljini i količini koja se transportuje.

Osnovni alat za rešavanje modela je Von Thunen-ova funkcija zakupa. Postoje tri vrste oznaka koje se koriste u modelu, i to:

- nemačke oznake,
- engleske oznake, i
- Hoover-ovi jedinstveni simboli. [72]

Funkcije cilja su sledeće:

$R = E \times (p - a)$ – nemački simboli

$R = Y \times (p - c)$ – engleski simboli

$R = Q \times (P - TC) - Q \times t$ – Hoover-ovi simboli

Promenljive	Nemački simboli	Engleski simboli	Hoover-ovi simboli
Zakup (po jedinici zemljišta)	R (Rent)	R	R
Rod (po jedinici zemljišta)	E (Ertrag)	Y (Yield)	Q (Quantity)
Cena	p (Preis)	p	P
Prosečni troškovi proizvodnje	a (Ausgaben)	c	$TC = F + aQ^b$ (Ukupni troškovi = fiksni troškovi + varijabilni troškovi)
Razdaljina od tržišta	k (Kilometer)	m (Miles)	x
Cena prevoza po jedinici proizvoda i jedinici razdaljine	f (Fracht)	f	t (transfer cost)

Tabela 1. Simboli Von Thunen-ovog modela [72]

William Alonso je 1964. godine proširio prethodni model, kako bi se primenio na komercijalno i industrijsko zemljište. U Von Thunen-ovom modelu se razmatraju samo transportni troškovi i funkcija zakupa opada sa porastom transportnih troškova jedne jedinice proizvoda sa zemljišta po jedinici daljine.

Alonso primenjuje koncept ponude zakupa, kako bi izolovao faktore koji doprinose spremnosti domaćinstva da plati pristup centralnom poslovnom području (CPP). Ponudeni zakup se definiše kao maksimalna renta koja bi se platila za komad zemlje na određenoj daljini od centra tržišta, ako je u pitanju ostvarivanje prosečnog profita. [74]

Alonsova teorija ukazuje na to da se domaćinstva ponašaju tako da kombinuju zakup i transportne troškove, tako da ako su transportni troškovi veći, onda zakup, koji bi platili, mora biti manji. Funkcija ponude zakupa se primenjuje kod izbora stambenih lokacija, a kriva ponuđenih cena kod industrijske lokacije.

“Kriva ponuđene cene” predstavlja kombinaciju zakupa zemljišta i daljine. Pokazuje koliki zakup zemljišta zakupodavac može da plati pri različitoj daljini, kako bi postigao unapred određeni nivo korisnosti (zato postoji kriva ponuđene cene za svaki nivo dobiti). Ponuđena cena je hipotetička, ako je cena zemljišta na određenom nivou, pojedinac će biti zadovoljan u određenom stepenu.” [72]

Alonso ističe tri ključne karakteristike krive ponuđene cene:

- svaki pojedinac ima svoju krivu ponuđenih cena,
- svaka kriva predstavlja prethodno određeni nivo korisnosti;
- cene predstavljene krivom ponuđenih cena ne moraju biti u vezi sa stvarnim cenama. [72]

Funkcija ponuđene cene za urbana preduzeća se definiše na sledeći način: “Opisuje cene koje je preduzeće spremno da plati za određenu lokaciju (razdaljinu od centra grada), kako bi postigla određeni nivo profita.” [72]

Alfred Weber je 1909. godine razvio teoriju industrijske lokacije koja je bazirana na principu da će preduzeće tražiti lokaciju gde je miks lokacionih faktora najbolji za poslovanje. Po Weberovoj teoriji to će biti prostor gde je proizvodnja najjeftinija. Analize razmatraju transportne troškove i troškove radne snage i pronalazi se tačka gde će ovi troškovi biti najniži. U analizu su uključeni i dostupnost, vrednost i gubitak vrednosti sirovina. Ako nema gubitka vrednosti tokom obrade sirovina, nije važno gde je locirana fabrika: na izboru sirovina, tržištu ili negde između. Ali, ako fabrika mora da radi sa sirovinama koje u različitom stepenu gube vrednost tokom proizvodnje, najbolja lokacija je blizu izvora sirovina. [23]

U slučajevima kada trošak materijala čini značajan udeo ukupnih troškova, fabrika mora da se locira u blizini izvora sirovina koji ulazi u sastav proizvoda. Lociranjem fabrike daleko od mesta nalaženja materijala povećavaju se transportni troškovi, što podiže i ukupne troškove proizvodnje, a time se smanjuje konkurentnost na tržištu. U suprotnom, potrebno je locirati fabriku blizu tržišta prodaje proizvoda. Alfred Weber je osmislio “indeks materijala” kao alat za određivanje da li locirati fabriku blizu izvora sirovina ili tržišta prodaje. Oznaka je M_i i predstavlja odnos između težine materijala i težine proizvoda. Ukoliko je M_i veći od 1, lokacija se bira u blizini izvora sirovina, a ukoliko je manji od 1, lokacija se bira prema tržištu prodaje. Pored učešća osnovnog materijala (sirovine) u proizvodu, potrebno je razmotriti i mogućnost korišćenja substituta.

$$M_i = t_m / t_p$$

M_i – Indeks materijala;

t_m – težina materijala korišćenog u industriji;

t_p – težina proizvoda;

Pretpostavke za model su sledeće:

- data je linearna proizvodna funkcija (nema substituta);
- sirovine su dostupne u neograničenoj ponudi po fiksnim cenama, nezavisnim od lokacije;
- materijalne sirovine su dostupne na određenom broju lokacija ili su svuda dostupne;
- tražnja je fiksna i koncentrisana na ograničenom broju poznatih lokacija (tačaka);
- transportni troškovi materijala ili proizvoda su linearni (direktno proporcionalni težini i daljini).

Na osnovu ovih pretpostavki, on je izdvojio parametre koji se mogu kvantifikovati: troškovi sirovina, troškovi rada, transportni troškovi i predložio da se lociranje vrši u mestu sa najmanjim troškovima.

Pored Webera, u klasičnoj teoriji, izdvajaju se i Schaffle, Laundhart i Moses koji su se bavili industrijskom lokacijom i unapredili Weberov model.

1.1.2 Neoklasična teorija

Neoklasične teorije sadrže određene faktore koji nedostaju u klasičnoj teoriji. Po prvi put se uzima u obzir tržište i njegove karakteristike, kao i konkurencija koja se razlikuje od savršene. Osim pristupa minimalnih troškova, uzima se u obzir i prihod.

Neoklasična teorija predstavlja nadgradnju klasične teorije, gde se uvode drugačije pretpostavke. Zagovornici neoklasične teorije su bili Losch, Christaller i Hotelling.

Avgust Losch je 1930. godine dao modifikaciju prethodne teorije i smatra da tražnja ne može biti u celoj zemlji ista i uvodi novu pretpostavku – zavisno od tražnje i prodajne cene u regionu, prihodi u tim regionima se razlikuju i prvi put se za osnovni cilj uzima maksimizacija prihoda.

“Christallerova centralna teorija ispituje odnos između tržišne funkcije lokacije i prostornog pregleda grada ili sela. Christaller je pokušao da objasni prostorni pregled položaja (veličinu i broj položaja i prostor za distribuciju) koristeći uslužnu funkciju. U njegovom objašnjenju postoje dva ključna faktora: početna tačka i daljina. Početna tačka za dobru uslugu određuje koliko kupaca je potrebno da preduzeće bude profitabilno. Pored daljine, bitno je i koliko su ljudi voljni da putuju da nabave određeni proizvod ili uslugu. Pod pretpostavkom da je slobodna konkurencija i ulazak na tržište, nastaje nesalomiva veza tržišta za svaki proizvod ili uslugu. Rezultat je heksagonalni oblik tržišnog područja. U centru tog tržišta se nalazi najbolja lokacija.” [23]

Pretpostavke koje uvode Losch i Christaller su sledeće:

- prostorna raspodela domaćinstava je nepromenljiva;
- domaćinstva imaju homogenu funkciju tražnje;
- transportni troškovi se mogu podeliti na pojedinačne proizvode. [23]

Hotelling-ovi razlozi u lokacionom međuzavisnom pristupu se razlikuju od Christallerovih. Hotelling bazira svoju teoriju na činjenici da preduzetnici uzimaju u obzir ponašanje svojih konkurenata vezano za lokaciju. Preduzeća pokušavaju da održe najbolju lokaciju, što obično rezultuje time da su svi blizu jedni drugima da bi pokrili što veći deo tržišta, pri čemu nijedan deo nije manji od konkurentskog. Ovaj fenomen je evidentan, na primer, u trgovini na malo, gde se dileri automobila ili nameštaja nalaze u blizini. Hotelling pretpostavlja dvopolno tržište, sa samo jednim konkurentom. Nedostatak Christaller-ovog pristupa je pretpostavka savršene konkurencije, a Hotelling-ovog pretpostavka da postoji samo jedan konkurent (duopol).

Svi navedeni modeli su bazirani na mikroekonomskim i deduktivnim razlozima, gde stvarno ponašanje ljudi nije razmatrano. Pretpostavlja se da je čovek savršeno informisan i racionalan i zanemaruju se motivi koji mogu uticati na izbor lokacije. Preduzetnik predstavlja "homo economicus-a" koji poseduje sve informacije, znanje i sposobnost da racionalno donosi odluke koje vode optimalnom rezultatu u pogledu prihoda, troškova i profita za preduzeće. [75]. Modeli su statični i parcijalni, jer ne uzimaju u obzir vreme kao promenljivu i razmatraju samo mali broj varijabli.

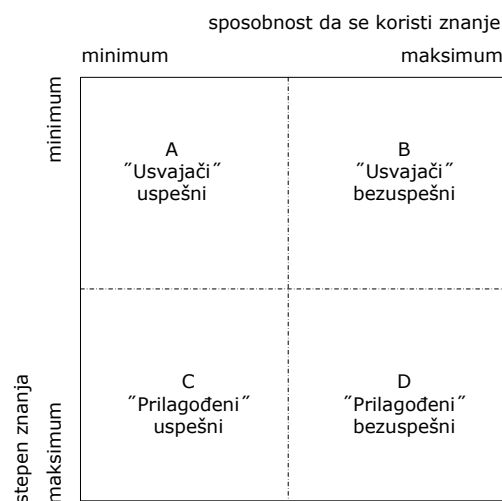
Koncept preduzetnika kao racionalnog donosioca odluka je u suprotnosti sa novim teorijama (bihejviorističkim, insitucionalnim, evolutivnim) koje karakterišu kasni 20. vek i rani 21. vek. Ovi pristupi dodeljuju veoma važnu ulogu ličnim karakteristikama preduzetnika, mreži ličnih i poslovnih odnosa preduzeća, i kulturnim uticajima prostorno-ekonomskog sistema. [75]

1.1.3 Bihejvioristička teorija

Bihejvioristička teorija lokacije predstavlja preduzeća kao entitete koji nisu u potpunosti racionalni i nemaju sve potrebne informacije, i kao rezultat toga, pronalaze podoptimalna rešenja. Nasuprot neoklasičnim faktorima, ističe se značaj internih faktora (spremnost i opažanje) i ličnih razmatranja. Preteča ove teorije je Simon (1959), koji ukazuje da je donosilac odluke pojedinac, koji nije sposoban da prikupi sve informacije bitne za donošenje odluke i nesposoban je za obradu svih informacija. On predlaže "satisficer-a", administrativnu osobu kao alternativu "homo economicus-u" iz neoklasične teorije. Preduzeća razmatraju ograničeni broj alternativa, i biraju prvo rešenje koje je "zadovoljavajuće". Preduzeća obrađuju informacije i suština je u načinu opažanja i ocenjivanju informacija i faktora koji utiču na lokaciju. [75]

U ovoj teoriji akcenat je na ponašanju preduzetnika i motivima. Bihejvioristički pristup je baziran na centralnim konceptima, kao što su poznavanje prostora, intelektualne mape i regionalne slike. Poznavanje prostora je definisao Pellenbarg 1994. godine kao baza na osnovu koje se donose odluke i dodeljuju vrednosti potencijalnoj poslovnoj lokaciji. Intelektualna mapa je subjektivna slika na osnovu koje dolazi ideja za određenu lokaciju. Ovo objašnjenje se takođe primenjuje na izraz regionalna slika sa kojom su povezane ostale prostorne asocijacije. Bihejvioristička analiza se suočava sa stepenom na kome određena lokacija odgovara zahtevima preduzetnika. Kada se ocenjuje lokacija, slika koju preduzetnik ima o trenutnoj lokaciji i drugim lokacijama igra veliku ulogu. [23]

Najzanimljivije tumačenje bihejviorističke teorije je Predova bihejvioristička matrica osmišljena 1969. godine. Pred ukazuje da nije uvek moguće da preduzetnik prikupi sve potrebne informacije i znanje. Često je teško da obradi i interpretira raspoloživo znanje.



Slika 19. Predova bihejvioristička matrica [23]

Pred (1967) počinje od ove pretpostavke da razvija "bihejviorističku matricu" koja sadrži četiri ključna elementa:

- 1) ulogu ograničenih informacija,
- 2) sposobnost da se koriste informacije,
- 3) precepcija i mentalne mape, i
- 4) neizvesnost. [75]

U bihejviorističkoj matrici preduzeća su podeljena duž dve dimenzije: 1) dostupnost informacija, 2) sposobnost da se koriste informacije. Pokazano je da dobro informisana preduzeća sa visokom sposobnošću da koriste informacije su približna "homo economicus-u", i očekuje se da će se locirati blizu optimalne tačke. Sa druge strane, preduzeća sa ograničenim informacijama i malom sposobnošću za korišćenje informacija, može se očekivati da će se locirati na manje profitabilnim ili neprofitabilnim lokacijama.

U ovom pristupu, po prvi put su troškovi relokacije uzeti u obzir, i mogu biti veoma značajni, uzimajući u obzir troškove traženja položaja, premeštanja, rekonstrukcije postojećih objekata, zapošljavanja i obuke nove radne snage.

Troškovi relokacije se mogu podeliti u tri grupe:

- 1) troškovi prilagođavanja (početna kapitalna investicija, investicije u reklamiranje da bi postali poznati potencijalnim kupcima, investicije u fabriku),
- 2) akumulirani troškovi (troškovi poslovanja), i
- 3) izlazni troškovi (koji se odnose na relokaciju) [76].

Navedeni troškovi i nepotpune informacije utiču da se preduzeća teže odlučuju da promene lokaciju. Takođe, ukoliko se menja lokacija, odabiraju se bliža, poznata mesta za koja postoje informacije, nasuprot daljih, nepoznatih mesta, koja nose neizvesnost.

Jedna od slabosti ovog pristupa je što se ne bazira na modelima, već je opisan. Kao u neoklasičnoj teoriji, malo pažnje se daje lokacionim faktorima i njihovoj vezi sa unutrašnjim procesima proizvodnje, investicijama i razvojem.

1.1.4 Institucionalni pristup

U klasičnom, neoklasičnom i bihejviorističkom pristupu, preduzeće su posmatrali kao aktivnog donosioca odluka koje funkcioniše u statičkom okruženju. Okruženje je predstavljalo površinu lokacionih faktora, koje preduzeća obrađuju.

Sedamdesetih godina porastao je interes za društvene kulturne institucije, sistem vrednosti i inovacije. Novi putevi su rezultovali institucionalnim pristupom, koji govori da je lokaciono ponašanje rezultat pregovaranja preduzeća sa različitim lokalnim i nacionalnim stakeholderima.

U institucionalnoj teoriji, više pažnje se pridaje okruženju i spoljni faktori ili institucionalni faktori su od presudnog značaja za izbor lokacije.

Institucionalni faktori su: prilagođavanje prostora, proširivanje, akvizicija, merđžovanje, preuzimanje, ali i poverenje, međusobno delovanje, kooperacija i dogovor. Navedeni faktori imaju ključnu ulogu u svim nivoima ekonomije, od strukture i funkcionisanja preduzeća, do operacija na tržištu i intervencija države. Proces učenja i inovacije su ključna komponenta institucionalnog pristupa, jer se samo inovacijama širi proizvodnja i znanje, a proširivanje kapaciteta je osnovni razlog za pronalaženje nove lokacije. Odnosi u mreži, poverenje i lojalnost između lidera u znanju i iskustvu u pojedinim sektorima su ključna komponenta učenja i inovacije. [75]

U institucionalnom pristupu, akcenat je na odnosima između preduzeća, umesto na ponašanju pojedinačnih preduzeća. Ponašanje preduzeća vezano za lokaciju je rezultat strategija investiranja preduzeća i rezultat je njihovog pregovaranja sa snabdevačima, vladom, sindikatima i drugim institucijama oko cena, poreza, donacija, infrastrukture, i drugih ključnih faktora u proizvodnom procesu preduzeća. Ekonomski uspeh mnogo ne zavisi od ponašanja preduzetnika kao racionalnog ekonomskog čoveka (neoklasična teorija), nego od odnosa sa institucijama u okruženju. [75]

1.1.5 Evolutivni pristup

Evolutivni pristup izboru lokacije je počeo da se razvija devedesetih godina i još uvek je u ranoj fazi razvoja. Zagovornici ovog pristupa smatraju da preduzetnici nisu spremni da preduzimaju nove aktivnosti u kojima nemaju iskustva (kao što je promena lokacije), i da na njihovo ponašanje presudno utiče zavisnost puteva (nove aktivnosti proizilaze iz prethodnih i zavisne su) i rutina (uobičajeni postupci i navike).

Preduzetnici teže ka putevima u kojima koriste znanje i iskustvo koje se zahteva na postojećim tržištima, i pri tome ignorišu puteve koji pružaju nove prilike, ali nose nepoznat rizik. To vodi ka zatvaranju, neiskorišćavanju prilika i podoptimalnom ponašanju. [Mariotti, 2005]

Preduzeća nisu spremna da izađu iz lokalnog konteksta, jer se takmiče na osnovu svog znanja, postupaka i kompetencija stečenih u prošlosti (sa određenom lokalnom vladom), a teško ih imitira konkurencija. Tako dolazi do prostornog nagomilavanja, ali ne kao rezultata racionalnog donošenja odluka o lokaciji, već zbog rasta znanja preduzeća o okruženju. Nove lokacije se biraju

u blizini postojećih ili u područjima sa sličnim karakteristikama okruženja i potrebnim znanjima. Dok je neoklasični pristup baziran na racionalnom izboru, evolutivni pristup se bazira na rutinskom ponašanju i lokalizovanom znanju.

Ukratko, može se reći da naoklasični pristup posmatra preduzeće kao crnu kutiju koja odgovara okruženju na potpuno racionalan način. U bihejviorističkom pristupu preduzeće donosi odluke koje uključuju konflikt, neizvesnost, učenje i prilagođavanje tokom vremena.

U institucionalnom i evolutivnom pristupu preduzeće je definisano interakcijama sa okruženjem.

Teoretski okvir	Ključni koncepti/(faktori)	Troškovi relokacije
Neoklasična teorija	Tržišna situacija, smanjivanje troškova (Lokacioni faktori)	-
Bihejvioristička teorija	Informacije/sposobnosti/percepcija/slike (Unutrašnji faktori)	+
Institucionalna teorija	Mreže, poverenje, socijalni kapital (Institucionalni faktori)	+
Evolutivna teorija	Zavisnost puta, rutina (Eksterni faktori)	+

Tabela 2. Pristupi i determinante relokacije [75]

Prelazak sa neoklasičnog na bihejvioristički, institucionalni i evolutivni pristup predstavlja prelazak sa teških faktora, tipičnih za neoklasičnu teoriju lokacije, na meke faktore drugih pristupa [13]. U "teške" faktore spadaju: transportni troškovi, troškovi radne snage, porezi, mere politike itd, a "meki" faktore su: dostupnost informacija, opažanje preduzeća, poverenje, odnosi sa snabdevačima, rutina, znanje itd.

Razlika između neoklasične teorije i ostalih pristupa je i u tome što ne uzima u obzir troškove promene lokacije, dok ostale teorije detaljnije razmatraju navedene troškove. (tabela 2)

Pregled teorija lokacije ukazuju da se bihejvioristički, institucionalni i evolutivni pristup preklapaju i da su u nekoj meri komplementarni.

Može se zaključiti da je osnovna prekretnica u razvoju nauke o lokaciji bila sedamdesetih godina, kada su neoklasične teorije kritikovane i kada je došlo do brzog ekonomskog razvoja u Evropi, Severnoj Americi i Japanu. To je dovelo do pojave bihejviorističke teorije, na osnovu koje su se kasnije razvili slični pristupi: institucionalni i evolutivni.

Opisane teorije izbora lokacije imaju brojne nedostatke i uzimaju u obzir samo ograničeni broj varijabli. Međutim, one služe kao osnova za određivanje faktora koji utiču na lokaciju. Takođe, postavljeni modeli predstavljaju bazu za formiranje novih modela, gde se prevazilaze njihovi nedostaci i smanjuje broj pretpostavki za rešavanje modela.

1.2. Osnovni pojmovi, značaj i trendovi u razvoju lokacije

Pojam lokacije se može definisati na više načina i to kao mesto, proces i resurs.

Lokacija predstavlja:

- mesto, odnosno položaj gde je nešto locirano ili može biti locirano;

- određeno geografsko područje;
- deo prostora izabran za obavljanje određene delatnosti.

Lokacija predstavlja i čin ili proces lociranja.

Pod pojmom lokacija podrazumeva se mesto u geografskom smislu na kojem se obavlja neka delatnost. Prema prof. dr M. Nikoliću, lokacija fabrike predstavlja "teritorijalnu distribuciju industrije sa nacionalnog i međunarodnog stanovišta, zavisno od faktora lokacije pojedinih industrijskih kapaciteta". [22]

"Lokacija kao resurs preduzeća predstavlja mesto na kome se preduzeće nalazi, obuhvata i sve karakteristike tog mesta, značajne za pokretanje i odvijanje posla." [2]

Sa aspekta položaja na kome se smešta objekat, razlikuju se dva osnovna pojma lokacije:

- pojam makrolokacije; i
- pojam mikrolokacije.

Pri izboru lokacije, najpre se određuje na kom mestu u okviru jedne države ili regiona treba locirati fabriku. Kada se odredi mesto u okviru jedne države ili regiona, tada se utvrđuje na kom mestu unutar regiona, industrijskog kompleksa ili industrijske zone treba locirati fabriku. U prvom slučaju se radi o makrolokaciji, dok se smeštanje fabrike u okviru određenog reona, naseljenog mesta, industrijske zone ili kompleksa, smatra mikrolokacijom.

Pojam makrolokacija fabrike predstavlja područje koje zadovoljava osnovne uslove za izgradnju i razvoj projektovane fabrike uz minimalne troškove izvođenja proizvodnje. [22]

"Makrolokacija je položaj proizvodnog sistema u okviru države, odnosno regije, sa rešenjem da se proizvodni sistem uklapa u sistem nacionalnog, odnosno regionalnog upravljanja." [77]

Pojam mikrolokacija fabrike predstavlja mesto u području mikrolokacije koje zadovoljava uslove za izgradnju svih sastavnih delova projektovane fabrike imajući u vidu njihovu tesnu prostornu, organizacionu i tehnološku povezanost, kao i povezanost sa okruženjem u cilju najracionalnijeg izvršenja projektovane proizvodnje. [22]

"Mikrolokacija predstavlja tačan položaj proizvodnog sistema u okviru grada, odnosno industrijske zone." [77]

Iz navedenog, može se zaključiti da izbor makrolokacije i izbor mikrolokacije predstavljaju osnovne faze u postupku izbora lokacije proizvodnog sistema.

Lokacija predstavlja i mikroekonomski i makroekonomski fenomen. Pojedinačne akcije proizvođača i potrošača (mikroekonomski element) postaju makroekonomski fenomen, kada se svi proizvođači i potrošači lociraju u nekom regionu. Oni menjaju karakteristike položaja obezbeđenjem bolje infrastrukture ili sistema obrazovanja i dovode do makroekonomskih promena. Industrijska lokacija je deo odnosa mikroekonomskih akcija i makroekonomske situacije. [14]

Cilj sprovođenja postupka izbora lokacije je pronalaženje optimalne lokacije objekta.

"Optimalna lokacija predstavlja onu lokaciju koja svojim pogodnostima najviše odgovara zahtevima određenog proizvodnog sistema i za njega obezbeđuje najveći uspeh." [77]

Kad se jednom izabere lokacija objekta ili proizvodnog sistema, ona se retko menja. Najčešće se preduzeća šire, usled razvoja, i traže nove lokacije za dodatne objekte (skladišta, prodavnice itd), razvijaju distributivne mreže. Zato je potrebno veliku pažnju posvetiti izboru lokacije.

Lokacija kao resurs predstavlja deo ukupne investicije u preduzeće. Svaka lokacija zahteva ulaganje za kupovinu i adaptiranje položaja određenom objektu. Pored toga, brojni troškovi su posledica lokacije. Najvažniji su transportni troškovi, koji u velikoj meri opterećuju preduzeće. Njihovo učešće može da dostigne i četvrtinu prodajne cene proizvoda, u zavisnosti od vrste proizvodnje i tipa proizvoda. [15] Zatim slede rashodi koji obuhvataju poreze, plate, troškove sirovina, a direktna su posledica izbora regiona za poslovanje.

Lokacija se bira za dug vremenski period i značajno utiče na troškove preduzeća. To ukazuje da je odluka vezana za lokaciju strateška i donosi se na najvišem nivou preduzeća. Samo top menadžment ima nadležnost za odluke tog tipa. Operacioni menadžeri ili industrijski inženjeri, primenom različitih metoda i tehnika, pomažu da se dobije najbolje rešenje ili pronalaze potreban alat za sagledavanje i procenu alternativa.

Postoji nekoliko strateških pitanja koja se odnose na lokaciju, a koje svojom metodologijom ističu Ujedinjene nacije, i to:

1. **Javna politika.** Država putem mera javne politike utiče na razvoj industrije u određenom regionu ili njeno suzbijanje. Restriktivnim merama politike suzbija rad određene grane, tako što postavlja nepovoljne uslove za izgradnju u tom regionu ili povećanjem poreskih obaveza za postojeće objekte. Najčešće se te mere preduzimaju u slučajevima zaštite životne sredine, kada je veliki broj industrijskih objekata u određenom području. Razvoj određene grane industrije se vrši uvođenjem poreskih olakšica, stimulativnih naknada za izgradnju i otvaranje novih objekata itd. Vlada svake države može da utiče na ulaganje stranih investicija kroz razvoj industrijskih zona i promovisanje države.

2. **Lokaciona orijentacija.** Lokaciona orijentacija podrazumeva orijentaciju preduzeća ili industrije prema tržištu ili prema resursima. Ukoliko troškovi materijala čine značajan deo ukupnih troškova preduzeća, tada se preduzeće locira u blizini izvora sirovina. U suprotnom ukoliko su transportni troškovi, osnovni troškovi preduzeća, onda se ono locira u blizini tržišta prodaje. Lokaciona orijentacija se određuje i pomoću indeksa materijala (Mi) koji je definisao Alfred Weber.¹

3. **Infrastruktura.** Pojam infrastrukture odnosi se na sve fiksne i trajne instalacije, tvorevine i objekte na određenom području. Infrastrukturu sačinjavaju instalacije i oprema neophodna za funkcionisanje pogona. Najvažniji faktori po UN su:

- Električna energija (dostupnost i troškovi);
- Transport (raspoloživost i blizina);
- Snabdevanje vodom (dostupnost različitih izvora).

4. **Socio-ekonomsko okruženje.** Socio-ekonomsko okruženje obuhvata različite strateške faktore koji mogu biti prirodni, društveni i politički. Prirodni faktor je klima, koja utiče na poslovanje ukoliko se proizvodi kvarljiva roba ili proizvodi osetljivi na toplotu (gas, tečni otpad, itd). Društveni faktor je radna snaga, u pogledu raspoloživosti, kvalifikacije radne snage i mogućnosti za osposobljavanje i obuku. Izgradnjom određenog društvenog objekta može se uticati na

¹ Detaljnije objašnjeno u prethodnom poglavlju.

migraciju radne snage. Političke faktore predstavljaju različiti zakoni i propisi koji se odnose na građevinsko zemljište, imovinsko-pravne odnose, konkurse za izvođenje radova i ostalo.

5. Geomehanički podaci. Geomehanički podaci se odnose na sve tehničke karakteristike područja koje se moraju istražiti prilikom razmatranja određene lokacije (geološka ispitivanja, hidrološka ispitivanja, geomehanička ispitivanja, seizmo-tektonska ispitivanja, itd).

6. Urbanistički uslovi. Urbanistički uslovi omogućavaju da se izgradnja objekata na lokaciji vrši u skladu sa planovima prostornog uređenja, da se ne narušava okruženje i da se ne ugrožava zdravlje i život građana.

7. Priključna mesta na instalacije i saobraćajnice. Ispituje se da li su do određene granice lokacije dostupni neophodni priključci i blizina saobraćajnica. [22]

Pored strateških faktora, na lociranje preduzeća utiču i trendovi koje diktiraju velike kompanije u svetu. Oni se odnose na povećano smeštanje fabrika u strane zemlje, lociranje u predgrađima i industrijskim zonama, decentralizaciju lokacija, preuzimanje napuštenih objekata i sve izražajnije lociranje snabdevača u blizini potrošača.

Poslednjih godina evidentiran je trend lociranja fabrika u strane zemlje. Razlozi za to su: širenje i osvajanje novih tržišta, jeftina radna snaga i povoljni geografski uslovi.

Pre nekoliko godina, kompanije su locirale svoje fabrike u centralnim zonama velikih gradova, najviše zbog transporta. Razvojem transportnog sistema, ovakav trend prestaje i fabrike se izgrađuju na periferiji.

Za razliku od njih, uslužne kompanije imaju cilj pozicioniranja baš u centru velikih gradova, kako bi bile bliže svojim korisnicima. Tako dolazi do formiranja industrijskih zona.

Da bi mogle da prošire svoja tržišta, mnoge kompanije lociraju svoje fabrike na više različitih lokacija. Ovakav način poslovanja omogućava da i pri zastoju jedne od fabrika, druge mogu neometano da proizvode i posluju.

Veliki pad proizvodnje 70-tih godina doveo je do zatvaranja mnogih fabrika. To je prouzrokovalo da se nekadašnji objekti jedne fabrike preuzimaju od strane druge.

Da bi isporuke bile vremenski usklađene sa potrebama proizvodnje, dobavljači se lociraju blizu korisnika, jer proizvođači ne žele da im se sirovine isporučuju pre nego što je to potrebno.

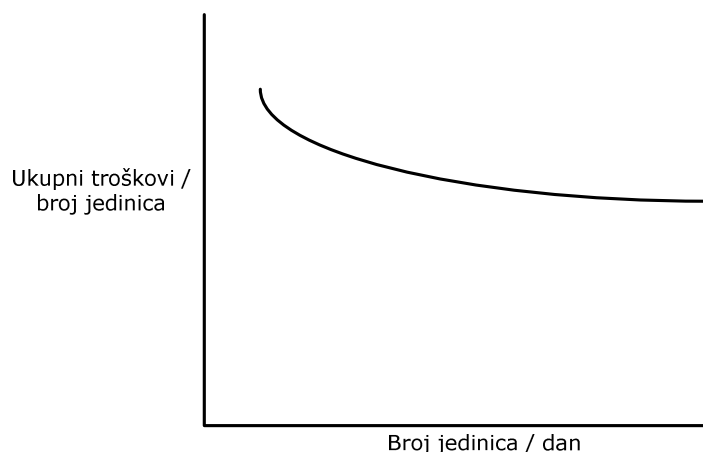
1.3 Osnovni pristupi izboru lokacije

Postoje dva osnovna pristupa izboru lokacije. Prvi je usmeren na smanjivanje troškova, a drugi na povećanje prihoda, odnosno profita. Ovi pristupi proizilaze iz prethodno opisanih teorija i omogućavaju preduzeću da se orijentiše na određene faktore u zavisnosti od cilja lociranja preduzeća.

1.3.1 Lociranje za minimiziranje troškova

Pretpostavka ovog pristupa je da je cilj preduzeća smanjivanje troškova rada objekta i prodaja proizvoda. Bez obzira na cilj, preduzeće zanima investicija i njena lokacija samo ako vodi ka cilju. Kako bi se detaljnije obradio navedeni pristup, potrebno je objasniti tipove konkurentskog okruženja i njihov uticaj na lokaciju.

Tradicionalna mikroekonomska teorija definiše firmu kao produktivnu jedinicu koja teži da maksimizira profit kroz proizvodnju i prodaju. Kako se to postiže zavisi od broja i prirode konkurentskih firmi. Osnovna ekonomija prepoznaje tri tipa konkurentnog okruženja. Prvi tip je **savršena konkurencija**. U takvim uslovima, firma deli proizvodnu funkciju, ili miks ulaza i proizvoda sa drugim firmama u industriji. Industrija se definiše kao grupa proizvodnih aktera koji dele tehnologiju i grupu proizvoda. S obzirom na to, troškovi firmi se razlikuju po troškovima ulaza i logističkim troškovima firme. Pošto firme proizvode identične proizvode, tržište je indiferentno na proizvode bilo koje firme. Kao rezultat, cena je fiksna na tržištu koje varira samo u agregatnom nivou tražnje. Svaki proizvođač se suočava sa istom cenom svog proizvoda. Kako bi se maksimizirala razlika između ukupnih prihoda i troškova, firma proizvodi što više proizvoda koje može da proda, osim ako troškovi ne rastu sa povećanjem proizvodnje. Zašto troškovi rastu sa povećanjem proizvodnje? Zato što su postrojenja napravljena za određeni obim izlaza. Slika 20. prikazuje zavisnost prosečnih troškova od izlaza za određenu firmu.



Slika 20. Kratkoročni prosečni troškovi kao funkcija nivoa izlaza [14]

Firma koja je locirala objekat tako da minimizira ukupne troškove proizvodnje (gde troškovi uključuju nabavku i montažu ulaza, proizvodnju i manipulaciju ulaza, i distribuciju proizvoda na tržište) pronalazi marginalnu krivu troškova ili minimalne troškove niže od konkurenta koji nema tako smanjene troškove. To povećava profit firme. Kada je cena konstantna, najveća konkurencija bazira se na troškovima. Na te troškove utiče lokacija firme.

Drugi tip konkurencije je **oligopolistička konkurencija**. U nekim industrijama, firme proizvode veću količinu proizvoda, u odnosu na veličinu tržišta, tako da njihov nivo izlaza utiče na cenu po kojoj će se proizvodi prodati na tržištu. U tom slučaju, firme se suočavaju sa krivom tražnje koja liči na krivu tražnje industrije u celini. Kako firma povećava izlaz, cena koju dobija za graničnu jedinicu, poslednju proizvedenu jedinicu, opada. Međutim, kao što tržišna cena firme varira sa nivoom izlaza, tržišna cena varira i sa nivoom izlaza većeg konkurenta. To doprinosi neizvesnosti i nestabilnosti u povećavanju profita firme. Koje su slične akcije konkurenata? Oligopolistička konkurencija daje važnost lokaciji firme i lokaciji konkurenata. Ako se konkurent locira blizu firme, cena opada. Ako konkurent nađe lokaciju po nižim troškovima, a sa koje može da opslužuje isto tržište, cena opada ili tržišni udeo opada za posmatranu firmu. Uslovi oligopolističke konkurencije vode do nekoliko potencijalnih lokacija za više postrojenja koji pripadaju više preduzeća.

Treći tip konkurencije je monopolistička konkurencija.

U ovim uslovima, izlaz (proizvod) posmatrane firme nije isti kao kod konkurenata. To je zbog razlika u kvalitetu, veličini, marki ili reputaciji. Pod pretpostavkom da postoje kupci koji žele svaku od različitih karakteristika proizvoda (neki vole veće proizvode, neki markirane, neki kvalitetne), svaka firma može da naplati premiju za svoj proizvod. Svaki kupac preferira neku karakteristiku i platiće više za taj proizvod. Međutim, ovi proizvodi su slični međusobno, a ako je za kupca cena previsoka, zameniće ga drugim konkurentskim proizvodom. Ovaj ograničeni monopol se naziva oksimoron frazom "monopolska konkurencija".

Pod tim uslovima, lokacija utiče na konkurenciju na dva načina. Monopolistička konkurentna firma ima pozadinu u svojoj lokaciji. Cena koju održava za svoje proizvode omogućava veći broj opcija za lokaciju. Proizvodnja markiranih i visoko kvalitetnih proizvoda često je zastupljena u centralnim i prema tome skupljim lokacijama, da bi mogli brže da reaguju na potrebe tržišta i promene. Primer su za modu Pariz, Rim, New York.

Sa druge strane, lokacija može biti izvor monopolske prednosti za proizvođača. Jedan jak razlog za preferenciju kupca za određeni proizvod su komfor ili troškovi održavanja proizvoda. Ako je proizvođač jedini izvor proizvoda na tržištu, onda on ima monopolski položaj. Tako može da utiče na cenu. Međutim, ako ima potencijalnih konkurenata koji proizvode slične proizvode, ali na daljini, cena može da raste do onog nivoa, dok se kupci ne odluče da kupe proizvod od daljeg proizvođača sa većim transportnim troškovima. Dakle, transportni troškovi imaju veliku ulogu u ovom slučaju na monopolističkom tržištu. Primer su benzinske pumpe. Kod njih se pretpostavlja da je gorivo istog kvaliteta. Kupac odlazi na najbližu pumpu, jer je besmisleno da ode na dalju lokaciju, ako je cena malo niža, samo da napuni jedan rezervoar. Tako da svaka pumpa ima monopolistički položaj u svom regionu. Ukoliko bi gorivo na pumpi toliko poskupelo, da se kupcima isplati da odu na dalju lokaciju, tada bi pumpa izgubila sve kupce, koji bi je koristili samo u hitnim slučajevima.

1.3.1.1 Jednostavan model smanjivanja troškova lokacije

Osnova ovog modela je Weberova teorija lokacije. To je normativni model koji se bazira na pretpostavci jednostavnog cilja. U ovom modelu cilj je da donosilac odluke mora da odluči o lokaciji proizvodnje koja će minimizirati troškove transporta i proizvodnje. Implementacija ovog cilja zahteva nekoliko pretpostavki za donosioca odluke. Najpre, proizvodnja je definisana kao konverzija ili modifikacija fizičkih komponenti korišćenjem mehaničke opreme i energije, radne snage i poznate tehnologije. Nijedna vrednost se ne realizuje od proizvodnje, dok se proizvodi ne prodaju kupcu. Ovaj model je koristan za proizvođače. Međutim, delovi modela koji se odnose na uticaj dostupnosti i troškova radne snage su slični i za uslužne aktivnosti.

Pored definisanja proizvodnje, postoje još četiri pretpostavke, koje čine model jednostavnijim:

1. Fiksna je i poznata kombinacija ulaza.
2. Lokacija ulaza je poznata i stalna. Podrazumeva se i da je radna snaga ista.
3. Cene ulaza i transporta su fiksne i poznate. Cene radne snage se ne menjaju.
4. Potrošnje na lokacijama su poznate i fiksne. Tražnja je ista i može se donositi odluka na osnovu nivoa prodaje. Da je tražnja elastična na cenu, proizvođač bi morao da zna svoje troškove (koji variraju sa lokacijom), pre nego što bi utvrdio koliko može da proizvede. [14]

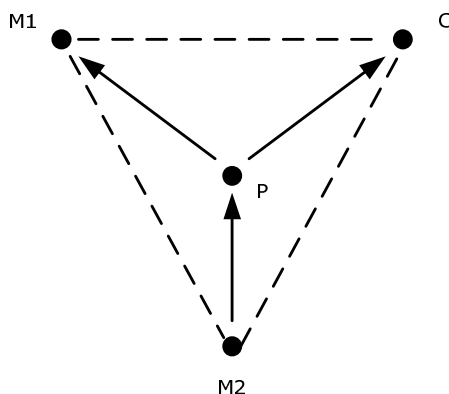
Korak 1: Smanjivanje transportnih troškova

U prvom koraku, bira se lokacija koja smanjuje ukupne troškove transporta u montaži i distribuciji.

Prvo, identifikuju se izvori ulaza (rudnici, fabrike, luke i skladišta) i finalna destinacija proizvoda (tržište). Tržište je teško identifikovati, jer je to retko jedan kupac. U većini industrija, nije ekonomski izgraditi odvojenu fabriku za svakog kupca, populaciju ili centar industrije. Ukoliko ima nekoliko odvojenih tržišta, svako od njih se razmatra kao posebna tačka.

Šta ako ima više alternativa za izvore? Koristi se najbliži položaj centru tržišta, osim ako neki udaljeniji izvor nije jeftiniji toliko da prevazilazi dodatne transportne troškove. Cilj je jednostavan: pronaći lokaciju gde su ukupni transportni troškovi najniži. Ova lokacija je "centar gravitacije" materijalnih izvora i centra tržišta.

Slika 21. ilustruje slučaj jednog tržišnog centra C i dva centra sirovina M1 i M2. Centar je u tački P, što je naša lokacija. Međutim, svaka od tačaka ima određenu snagu. To je proporcija ulaza u proizvodni proces pomnožena sa stvarnim troškovima transporta pojedinačnih ulaza ili proizvoda.



Slika 21. "Troughao lokacije" (isprekidane linije) i centralna lokacija proizvodnje P [14]

Pretpostavimo jednostavan proizvodni proces, kombinovanjem ulaza X1 i X2 za proizvodnju proizvoda Y. Jednačina 116 pokazuje proporcionalni odnos ovih ulaza u proizvod Y, uključujući tehničke koeficijente a1 i a2. Pretpostavimo da je svakih od ulaza fizički materijal (a ne radna snaga ili kapital) i da su koeficijenti a1 i a2 težine ulaza po težini jedinice proizvoda. Tako se mogu izračunati ukupni transportni troškovi za proces TT po jedinici proizvoda Y u jednačini 117. Međutim, transportne troškove ulaza X1 i X2 i proizvoda Y nije tako jednostavno izračunati: to je proizvod specifičnih transportnih cena i daljina (jednačina 118). Jednačina 119 obezbeđuje ukupne transportne troškove.

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots\dots\dots(116)$$

Y - jedna jedinica proizvoda;

a1, a2 - jedinica ulaza X1 i X2 potrebna po jedinici Y;

$$TT_y = T_1 a_1 + T_2 a_2 + T_y \dots\dots\dots(117)$$

TT_y - ukupni troškovi transporta (montaža i distribucija);

T_i - transportni troškovi za i ;

$$T_i = t_i d_{ip} \dots \dots \dots (118)$$

t_i - cena transporta jedne jedinice i po jedinici daljine;

d_{ip} - daljina od izvora i do destinacije proizvoda Y na lokaciji p .

$$TT_y = t_1 d_{1p} a_1 + t_2 d_{2p} a_2 + t_y d_{yp} \dots \dots \dots (119)$$

ili opšte

$$TT_y = \sum_i t_i d_{ip} a_i$$

Ostaje jedna komplikacija: d_{ip} varijabla u jednačini 112 je zavisna, jer svaka daljina se meri sa iste proizvodne lokacije - one koju ne znamo! Drugi način formulisanja ove međuzavisnosti je prepoznavanje da je daljina zamenljiva. Može se smanjiti d_{yp} na 0, lociranjem proizvodnje u centru tržišta, ali je ta lokacija dalja od izvora sirovina. Zato se moraju izračunati i uporediti ukupni troškovi transporta, ako se proizvodno postrojenje locira u centru tržišta ili na izvoru neke sirovine. Lociranje proizvodnje u nekoj krajnjoj tački logističkog toka, eliminiše sve transportne troškove za tu tačku, i može predstavljati minimum. Rezultati se moraju porediti sa međutačkama koje smanjuju troškove transporta.

To se može odrediti približno centrom gravitacije, gde je svakoj tački i dodeljena težini koja odgovara $a_i t_i$, količini ulaza transportovanih po jedinici izlaza (1 za tačku tržišta) pomnoženo sa transportnim troškovima po jedinici i po jedinici daljine. Ovaj metod je opisan u okviru poglavlja metode izbora lokacije.

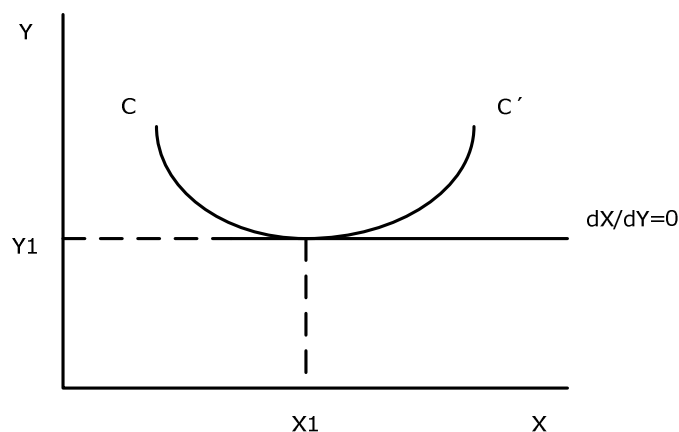
Kihn i Kuenne su razvili algoritam za testiranje tačke za minimalne troškove transporta. Kriva dostiže maksimum ili minimum, na y -osi gde je nagib jednak 0 (slika 22). To je isto što reći da je minimum ili maksimum tamo gde mala promena x ne dovodi do primene y ili da je $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Kriva koju posmatramo je kriva ukupnih transportnih troškova koja se menja sa promenom koordinata x i y potencijalnih proizvodnih lokacija.

Ako postoji minimum, koji nije na izvorima sirovina ili centru tržišta, onda će minimum biti tamo gde je prvi izvod ukupnih transportnih troškova po x i y jednak 0, drugim rečima, $\frac{\partial TT_y}{\partial x_p} = 0$ i

$$\frac{\partial TT_y}{\partial y_p} = 0 \text{ (jednačina 113)}$$

Ovi uslovi se mogu koristiti za testiranje tačke minimalnih transportnih troškova u okruženju centra gravitacije i uz pomoć kompjutera.



Slika 22. Kriva marginalnih troškova i marginalnih cena [14]

$$\frac{\partial \Pi_y}{\partial x_p d_i (x_i - x_p)} = 0 \quad i$$

$$\frac{\partial \Pi_y}{\partial y_p d_i (y_i - y_p)} = 0 \quad (\text{jednačina 120})$$

Prisustvo stvarnih transportnih mreža komplikuje ovaj proces, jer se ne može koristiti *Cartesijanova* geometrija. Međutim, mogu se izvesti sledeći zaključci.

1. Ako svi ulazi i gotovi proizvodi imaju iste transportne troškove po jedinici težine i daljine, onda materijalni ulazi koji imaju velike materijalne koeficijente (npr, potrebne su velike količine za poređenje sa količinama gotovih proizvoda) imaju veliki uticaj na proizvodnu lokaciju sa minimalnim transportnim troškovima.

Ako se razmatraju samo transportni troškovi, onda se očekuje da se kartonske kutije proizvode blizu proizvođača fiber vlakna. Međutim, troškovi transporta gotovih kutija do kupca mogu uticati na više tržišno orijentisanu proizvodnju kutija, naročito u uslovima monopolske konkurencije.

2. Materijalni ulazi ili finalni proizvodi koji imaju veće transportne troškove po jedinici težine i daljine imaju uticaj na minimalne troškove lokacije veći nego što je odnos njihovih težina u procesu. Materijalni ulazi i finalni proizvod koji imaju manje transportne troškove po jedinici težine i daljine imaju manji uticaj na troškove lokacije nego što je odnos njihovih težina u proizvodnom procesu.

Lomljivi i kabasti ulazi, kao što je staklena kugla, proizvode se blizu procesa finalne proizvodnje. Sa druge strane, specijalni vozovi za ugalj smanjuju troškove transporta po toni uglja. Zato ovi lomljivi, kabasti ulazi više nemaju veliki uticaj na lokaciju, kao što je proizvodnja čelika.

3. Skoro svuda prisutni materijalni ulazi, kao što je voda, pesak ne moraju se transportovati do proizvodne lokacije i d_i je jednako 0, tako da ne utiču na lokaciju.

Industrijski planeri pretpostavljaju da je vazduh neophodan za hlađenje ili hemijske reakcije, uvek prisutan bez obzira na lokaciju. Zato se vazduh retko koristi kao promenljiva u donošenju

odluka o lokaciji. Bilo koji proces koji zahteva čist vazduh, svežu vodu itd, preduzeće ih može lako nabaviti.

4. Materijalni ulazi koji gube težinu u procesu, bilo kao otpad ili proizvod, nisu u potpunosti sadržani u proizvodu koji se transportuje na tržište. Ukupni transportni troškovi se smanjuju lociranjem proizvodnje blizu njihovih izvora, i svođenjem d_i na 0. Zato se za te ulaze preporučuje materijalno orijentisana proizvodna lokacija (blizu izvora sirovina).

Industrijske aktivnosti koje obrađuju materijale (ulje) lociraju se blizu rudnika, luka gde se materijali mogu jeftino nabaviti.

5. Analogno tome, materijalni ulazi čija težina ostaje u celosti u proizvodu (kao što su delovi automobila, kompjutera) imaju mali uticaj na lokaciju, jer je njihova težina zastupljena u svim logističkim putanjama. Tržišno razmatranje ili dostupnost i troškovi nepokretnih ulaza imaju veliku ulogu u lokaciji.

Fabrika za montažu automobila teži da se locira blizu centra velikih tržišnih područja, pokazujući relativnu završenost komponenti koje se sastavljaju i veliki obim u automobilske industriji. Druge montaže, kao što su elektronski proizvodi, često imaju lokacije gde su troškovi radne snage manji, i pokazuju veće prostorne razlike u najmu, nego u transportnim troškovima i distribuciji.

6. Za proizvodni proces koji sadrži svuda prisutne proizvode i jednostavne ulaze, najbolja je lokacija u centru tržišta.

Proizvodnja i punjenje gaziranih napitaka kombinuje koncentrat, vodu, ugljen dioksid i kontejnere. Distribucija lokacija fabrika flaša liči na distribuciju populacije u regionu. Tražnja za gaziranim napicima je toliko da kompanije postavljaju fabrike za proizvodnju flaša u svakom većem centru.

7. Ako su gotovi proizvodi lomljivi ili drugačije skupi za transport od materijalni ulazi, onda je lokacija bliža tržištu. Proizvodnja kvarljivih proizvoda, sveže hrane, odvija se u okolini vodećih metropola.

Korak 2: Razmatranje nepokretnih ulaza

Postoje kritični ulazi za proizvodnju koji se ne mogu transportovati. Zaposleni su najbolji primer za to. Radna snaga je relativno nepokretna između dva regiona. Prvo, radnici mogu da zamene svakodnevni put od kuće do posla promenom prebivališta. Putovanje je skupo i teško. Drugo, kada se ljudi kreću među regionima, oni prime karakteristike lokalne radne snage (npr. radno vreme, pravila itd), tako da putovanje radne snage iz drugog regiona gubi smisao. Troškovi radne snage variraju između lokacija zbog više faktora, kao što su troškovi domaćinstva, broj i procenat rasta potencijalnih radnika, nivo industrijalizacije regiona, promene lokalne ekonomije regiona. Međutim, pretpostavka da je radna snaga nepokretna utiče na to da proizvođač plaća pretežne troškove za radnu snagu u tom regionu. Da bi ostvarili prednost u nižim troškovima radne snage, fabrika mora da se locira u području nižih troškova: "uvoz radnika" iz drugih regiona nije rešenje.

Postoje drugi elementi proizvodnih troškova koji oslikavaju lokalno okruženje, kao što su porezi, zagađenje sredine i korišćenje lokalnih, javnih usluga i porezi. Ove promenljive se mogu razmatrati, ali za razliku od materijalni ulaza, troškovi isporuke nisu jasna funkcija daljine od bilo koje tačke. Ako je predložen objekat lociran blizu jedne tačke, dalje je od neke druge tačke. Pošto

to nije slučaj sa ovim varijablama, jednostavan model lokacije se suočava na drugi način sa ovim varijablama u odnosu na transportne ulaze i finalne proizvode.

Svrha koraka 2. je da odredi da li je vredno ili nije vredno locirati objekat u području nižeg najma. Jeftinija lokacija se ne poklapa sa lokacijom minimalnih transportnih troškova, ako razlika u proizvodnim troškovima prevazilazi razliku ukupnih transportnih troškova. Lokacija nižih troškova najma se preporučuje ako je:

$$(w_p - w_b) a_i > tt_b - tt_p \dots\dots\dots(121)$$

gde je:

- w_p - troškovi radne snage (po jedinici radne snage) koji važe na lokaciji minimalnih transportnih troškova p;
- w_b - troškovi radne snage u regionu niskih troškova b blizu lokacije minimalnih transportnih troškova;
- a_i - broj radnika potrebnih za proizvodnju jedinice proizvoda;
- tt_b - ukupni troškovi montaže i distribucije po jedinici proizvoda, ako se proizvodnja odvija u regionu b;
- tt_p - ukupni troškovi montaže i distribucije po jedinici proizvoda, ako se proizvodnja odvija u regionu p;

Ova jednostavna nejednačina stavlja u fokus tri ključne promenljive u određivanju atraktivnosti niskih troškova radne snage: razlika u troškovima na dve potencijalne lokacije, razlika u ukupnim transportnim troškovima na dve lokacije i intenzitet radne snage u procesu. Regioni niskih troškova koji su u blizini ili dobro povezani sa izvorima sirovina i centrom tržišta su posebno atraktivni. Ove lokacije su atraktivne za proizvodnju koja se pretežno oslanja na radnike.

Postoji i nekoliko problema u ovim regionima. Prvo, sve drugo može biti nejednako u ovim regionima (sem jeftine radne snage). Drugi nepokretni ulazi mogu imati velike troškove proizvodnje ili biti nedostupni na lokacijama sa nižim troškovima radne snage (kao što je infrastruktura). Drugo, slaba povezanost ovih regiona i trgovinske barijere sa regionima niskih troškova. Treće, neke aktivnosti imaju mnogo koristi od razlika u troškovima radne snage, ali za neke aktivnosti te uštede u troškovima radne snage lako nadmaše transportni troškovi i ostali troškovi.

Treba razmotriti i druge nepokretne ulaze, kao što je električna energija, porezi lokalnih vlada, u odnosu na transportne troškove, i stepen u kome se proizvodnja oslanja na taj ulaz. Ključni element koraka 2. je poređenje ušteda u regionima sa nepokretnim ulazima sa povećanjem transportnih troškova za pokretne ulaze i proizvode.

Korak 3: Razmatranje potencijalnih koristi nagomilavanja (aglomeracije)

Akcije proizvođača u istoj industriji imaju važan efekat na troškove tih proizvođača. Neki od tih troškova variraju u zavisnosti od daljine između proizvođača.

Agglomeracija predstavlja termin za grupisanje sličnih operacija. Zato što koristi aglomeracije zavise od lokacije na određenom mestu, te pogodnosti se mogu proceniti u odnosu na dodatne transportne troškove zajedno sa troškovima radne snage iz koraka 2. Donosilac odluke može uzeti postojeću lokaciju kao datu. Međutim, prisustvo aglomeracije zavisi od udruženih akcija

pojedinačnih kompanija. Iz tog razloga i industrijske perspektive, Weber je postavio razmatranje aglomeracije kao treći korak.

Ekonomija aglomeracije predstavlja smanjenje jediničnih troškova proizvodnje, bazirano na pogodnostima blizine ostalih proizvođača. Zašto je ova blizina važna? Izvori ekonomije aglomeracije uključuju, deljenu, specijalizovanu infrastrukturu, kao što su putevi, luke, i železnice. Novo, malo postrojenje zahteva radnike sa specifičnim veštinama, ima koristi od lokacije blizu većeg postrojenja u istoj industriji. Radnici se mogu unajmiti dalje od većeg postrojenja ili se mogu unajmiti radnici u području sa istim iskustvom, trenutno nezaposleni. To smanjuje troškove i troškove obuke za posebne veštine u toj industriji. Koraci 1 i 2 vode do ovog rezultata zbog sličnosti ulaza i intenziteta radne snage u istoj industriji. U stvari, razlog za disperziju postrojenja je zbog prostora koji se mora pokriti.

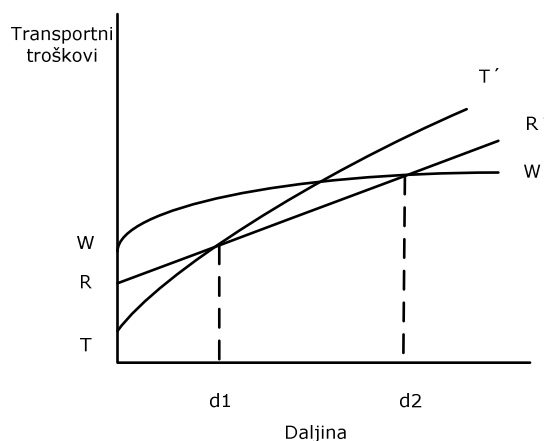
1.3.1.2 Transportni troškovi

Troškovi transporta obuhvataju nekoliko komponenti: pakovanje, utovar, troškove transportera, operativne troškove putovanja i istovar. Samo se operativni troškovi povećavaju sa daljinom, a ostali troškovi su fiksni i nezavisni od daljine. U predviđanju transportnih troškova i određivanju vozarina mogu se odvojiti fiksni od operativnih troškova (prevoznina bi uključivala troškove rukovanja, troškove premeštanja i stvarne troškove prevoza po kilometru) ili se može utvrditi raspodela troškova koji su opadajuća funkcija daljine (prevoznina sadrži daljinu i težinu, i cenu po tona kilometru, gde je cena veća za manja rastojanja nego duža).

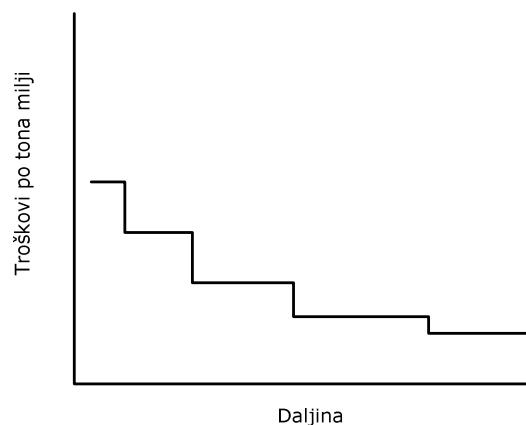
Kamioni i vozovi koštaju mnogo manje po tona kilometru za veće daljine, zbog veće daljine koja amortizuje fiksne troškove. U odnosu na prugu i vodeni transport, kamioni i avioni imaju mnogo veće operativne troškove nego fiksne (slika 23)

(Porede se fiksni i operativni troškovi kamiona fiksni troškovi = OT , a operativni kao funkcija daljine prikazani krivom TT' ; pruge fiksni troškovi = OR , a operativni RR' ; i vodeni transport fiksni troškovi = OW , a operativni WW').

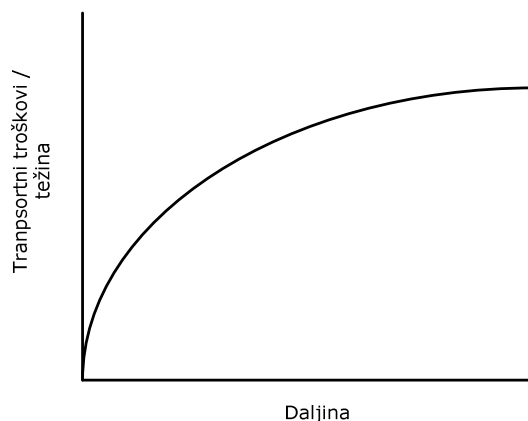
Kamioni daju minimalne troškove za daljinu manju od d_1 , pruge za daljinu između d_1 i d_2 , a vodeni transport za daljinu veću od d_2 .



Slika 23. Fiksni i operativni troškovi u zavisnosti od vrste transporta [14]



Slika 24. Tipična raspodela prevoznine izražena u ceni po tona milji za isporuku na različite daljine (Kriva je nacrtana po prosečnim, a ne ukupnim troškovima i opada sa povećanjem daljine, jer se fiksni troškovi transporta raspodeljuju na ukupnu cenu prevoznine)



Slika 25. Krivolinijska prevoznina

Kako to utiče na donošenje odluke o lokaciji?

U koraku 1 optimum je blizu jeftinog izvora sirovina ili centra tržišta, fiksni troškovi transporta pokazuju da je jeftinije locirati proizvodno postrojenje na položaju izvora sirovina ili centra tržišta. Blagi rast troškova isporuke drugih jedinica malo dalje bi trebao biti manji nego fiksni troškovi za kraća pomeranja. Prema linearnoj krivoj troškova transporta, obično je korisno locirati proizvodnju na izvoru sirovina ili centru tržišta. Ova razmena je važna kada se koristi pruga ili vodeni transport zbog visokih fiksnih troškova.

Troškovi punjenja i pražnjenja se ponavljaju prilikom prelaska sa jednog načina transporta na drugi: brod na prugu, sa pruge na kamion. Često je jeftinije locirati proizvodnju na prelomnim tačkama u lancima snabdevanja nego pronaći lokaciju koja smanjuje ukupnu daljinu.

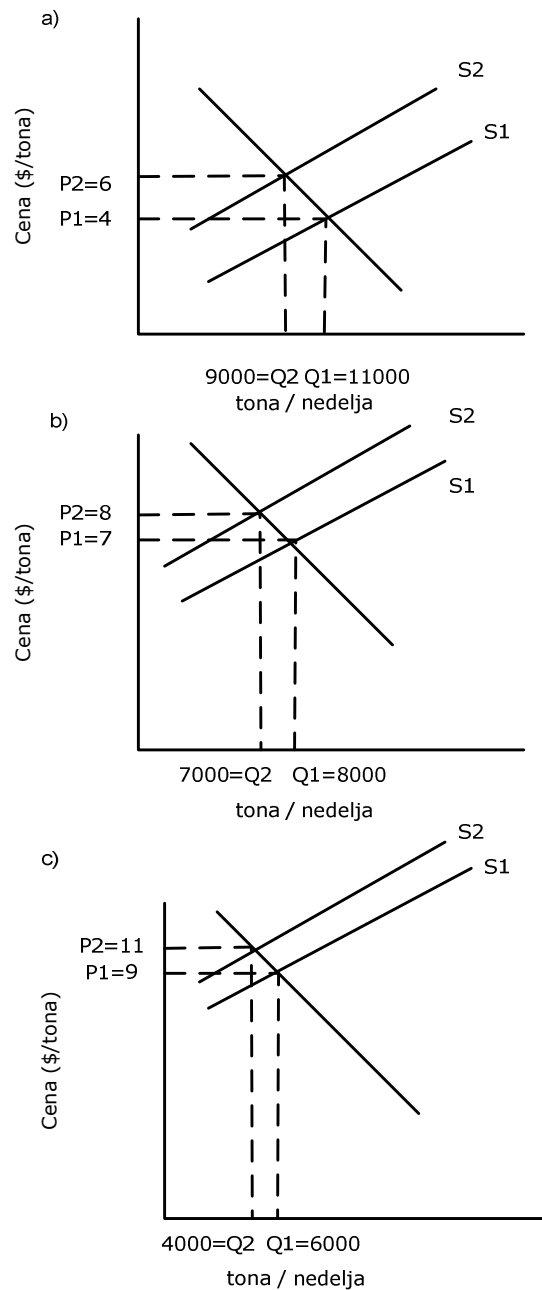
Model smanjivanja troškova pretpostavlja da proizvođač plaća troškove isporuke sirovina na položaj proizvodnje i troškove isporuke proizvoda u centar tržišta. Ova kombinacija motiviše proizvođača da pronađe lokaciju sa minimalnim troškovima transporta.

1.3.2 Lokacija za maksimiziranje prihoda i profita

Postoji jedna ključna razlika između ovog i prethodnog modela. Akcenat je na određivanju cena i tražnje proizvoda i usluga prodatih u regionima jedne zemlje. Van nacionalnih granica, na cenu i tražnju utiču međunarodni kurs, tarife uvoza i međunarodne razlike u distributivnim sistemima. U slučaju Amerike i Japana, američki proizvođači su smatrali da su bliski odnosi japanskih proizvođača i distributera otežavali ulazak nejapanskih proizvoda na tržište.

U okviru jedne zemlje, neki proizvodi su prodati po istoj ceni distributerima u regionu, a neki proizvodi su prodati za osnovu cenu plus troškovi isporuke. U slučaju usluga, isporuku može da obezbedi provajder usluge, može se zahtevati od kupca da putuje da bi konzumirao uslugu, ili plaćanje telekomunikacionih troškova za usluge koje se mogu tako obezbediti. Kada proizvođač apsorbuje troškove distribucije tržišta, cena nije prostorna promenljiva. Zato da li ima razlike gde je proizvodnja locirana? Da, jer se troškovi distribucije moraju platiti, bez obzira da li se oni naplaćuju od kupca ili ne. Prvi slučaj, uniformna raspodela cena isporuke podrazumeva da proizvođač uključuje prosečne troškove transporta u cenu koju naplaćuje kupcu (kupac može biti kompanija, skladišni distributer, ili pojedinačni kupac). Daleki kupci su subvencionirani kupcima koji su bliže proizvodnoj lokaciji. Određivanje cena je jednostavno i marketing može da nastavi sa pretpostavkom da finalni kupci (možda nakon nekoliko međuprodaja) imaju slične cene. Šema određivanja cena je uobičajena za korisnike proizvoda. Situacija postaje zabrinjavajuća kada proizvođač prepozna da veća cena smanjuje prodaju, čak iako svako plaća istu cenu.

Odgovor tržišta na veće cene je manja tražnja. Slika 26. to ilustruje.



Slika 26. Različita elastičnost cene i tražnje [14]

Ta reakcija se naziva cenovna elastičnost tražnje: procenat promene tražnje je rezultat procenta promene cene u obrnutoj srazmeri. Jednačina 122 to pokazuje, deljenjem procenta promene u kvantitetu tražnje (Q) sa odnosom promene cene (P).

Ako je $Q_a = (Q_1 + Q_2)/2$ i $P_a = (P_1 + P_2)/2$, onda je

$$E = - \frac{Q_2 - Q_1 / P_2 - P_1}{Q_a P_a} \dots\dots\dots(122)$$

gde je:

Q_a, P_a - prosečne vrednosti Q i P ;

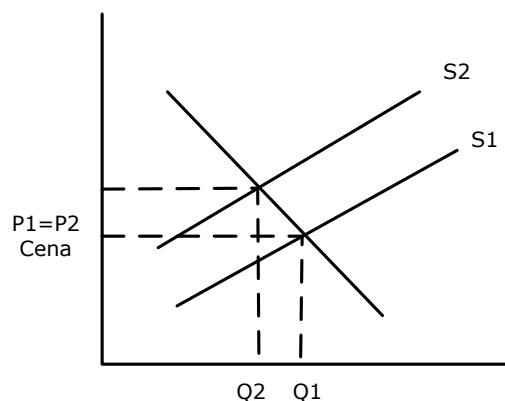
Q_1, P_1 - stvarne vrednosti Q i P ;

Q_2, P_2 - promenjene vrednosti Q i P ;

E - cena elastičnosti tražnje;

Negativni predznak u jednačini menja da rezultat ne bude negativan. Stepenn elastičnosti tražnje varira sa nivoom cene istog proizvoda, i varira među proizvodima i tržištima. Vrednosti između 0 i 1 predstavljaju malu elastičnost ili neelastičnu tražnju. Vrednosti veće od 1 predstavljaju elastičnu tražnju. Slika 26. ilustruje te vrednosti. Ako se firma suočava sa neelastičnim tržištem, može polako podizati cenu i postići veći prihod, jer je reakcija smanjenja tražnje manja od povećanja cene. (slika 26 a) Ako se firma suočava sa elastičnim tržištem, povećanje cene smanjuje ukupan prihod, a smanjenje cene povećava ukupan prihod (slika 26 c).

Kako elastičnost tražnje utiče na pojedinačnog potrošača? Prvo i najvažnije, stepen konkurentnosti određuje elastičnost. Pod hipotetičkim uslovima savršene konkurencije, svaki proizvođač se suočava sa horizontalnom funkcijom tražnje. Drugim rečima, cena je unapred određena vrednost. Svako povećanje plana troškova proizvođača (jedinični troškovi kao funkcija nivoa izlaza) ili krive snabdevanja rezultuju u smanjenom nivou izlaza za proizvođača (slika 27). Ova ekstremna situacija pokazuje važan izvor elastičnosti tražnje: dostupnost substituta za kupce.



Slika 27. Efekat smanjene nabavke na nivo izlaza

Unutar industrije, konkurenti proizvode substitute. Ukoliko cene u automobilske industriji rastu, više ljudi će koristiti javni transport.

1.3.2.1 Smanjivanje potencijalnih transportnih troškova

Kako ova elastičnost utiče na proizvođača koji prodaje po uniformnoj ceni? Zato što transportni troškovi nisu besplatni, svi kupci plaćaju prosečne transportne troškove koji su ugrađeni u cenu. Ako je tržište elastično po opšte važećim cenama, proizvođač može da poveća prihod smanjivanjem cene. Jedan način da se ovo postigne uz održavanje uniformne politike cena je lociranje u centru tržišta, tako da su ukupni transportni troškovi minimalni. To se može izraziti kao potreba da se identifikuje tačka p koja ima minimalne potencijalne transportne troškove do tržišta (PTC) ili

$$\min PTC_p = \sum_i M_i t_{pi} \dots\dots\dots(123)$$

gde je

PTC_p - potencijalni transportni troškovi distribucije od tačke p ;

M_i - veličina tržišta na lokaciji i ;

t_{pi} - transportni troškovi od p do i po jedinici proizvoda;

Različite mere se mogu koristiti za aproksimaciju M_i . Za korisničke proizvode, populacija regiona i je dobar pokazatelj; još bolji je populacija pomnožena sa dohotkom po glavi stanovnika. Za industrijske proizvode, M_i mora da se meri od industrijske baze i , kao što su ukupna prodaja, zaposlenje, ili dodata vrednost industriji u i . t_{pi} često nije jednostavan proizvod daljine od potencijalne proizvodne lokacije i , već može biti kompleksnija funkcija daljine, zbog prirode transportnih troškova i cena. Firma koja razmišlja o tržišno orijentisanoj lokaciji mora da preračuna TPC mnogih potencijalnih tačaka p . Proračun treba da ima šablon, koji je prikazan na slici 28 do 31.

10	10	10	20	30
10	10	10	20	10
20	20	10	10	10
30	30	10	20	20
50	30	20	20	40

Slika 28. Veličina lokalnih tržišta (M_i) na tržišnom području

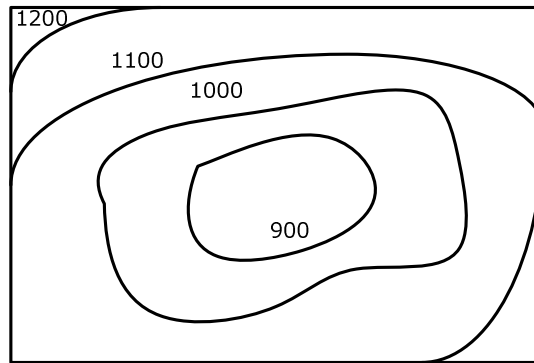
30	30	30	60	90
25	25	25	50	30
40	40	20	25	30
45	45	20	50	60
50	45	40	50	120

Tabela 29 . Troškovi distribucije proizvoda od lokalnog tržišta P do svake ćelije i , ili $C_i = M_i t_{pi}$,
gde je $t_{pi} = 1 + 5d_{pi}$

1245	1165	1130	1135	1195
1120	1015	975	1000	1115
1045	930	875	955	1080
1025	915	910	965	1090
1075	1005	995	1045	1145

Tabela 30. Potencijalni transportni troškovi sa svakog lokalnog tržišta na sva druga lokalna tržišta, ili $PTC_p = \sum_i M_i t_{pi}$

Distribucija lokacija sa minimalnim transportnim troškovima je blizu guste koncentracije tržišta, u donjem levom uglu (slika 31) ali je dva druga gusta tržišta odvlače u donji i gornji desni ugao. Proizvodne lokacije u gornjem levom uglu zahtevaju najveće troškove distribucije.



Slika 31. Izodepanee potencijalnih ukupnih transportnih troškova, PTC

1.3.2.2 Određivanje f.o.b. cena

Alternativna politika cena naplaćuje svakom kupcu proizvodne troškove (koji uključuju transportne troškove sklapanja ulaza) i troškove transporta proizvoda kupcu. U slučaju prodaje automobila, finalni kupac plaća troškove transporta automobila od fabrike do prodajnog prostora. To se često naziva kao formiranje f.o.b cena. *F.o.b* je skraćenica od luka otpreme i označava cenu naplaćenu za prevoz proizvoda. *Formiranje f.o.b cena* omogućava da transportni troškovi imaju direktni uticaj na tražnju. Udaljeni kupci imaju veće cene nego bliži kupci. Ako je tražnja u potpunosti elastična ($E > 0$), količina prodana daljim tržištima će biti mnogo manja nego količina prodana na bližim tržištima. Proizvođač koji želi da poveća prodaju, treba da se locira na najgušćem tržištu. To povećava tražnju na bližim tržištima, a smanjuje je na udaljenim tržištima, jer je njihova tražnja smanjena zbog dodatnih troškova koji se naplaćuju. Drugim rečima, cilj je izabrati lokaciju sa maksimalnim tržišnim potencijalom, koji predstavlja sumu regionalnih tržišta dostupnim proizvodnom postrojenju, gde je veličina svakog tržišta obeležena daljinom od postrojenja. Grubi matematički izraz glasi:

$$\max MP_p = \sum_i M_i \left(1 - \frac{2E_i t_{pi}}{2P_p + t_{pi}} \right) \dots\dots\dots (124)$$

MP_p je tržišni potencijal od proizvodne tačke p . Jednačina ukazuje na potrebu da se uzme u obzir tražnja svih tržišnih područja i da se smanji efektivna tražnja udaljenih regiona bazirana na stepenu u kome troškovi distribucije utiču na tražnju. Teško je primeniti ovu jednačinu, jer elastičnost može da varira između regiona.

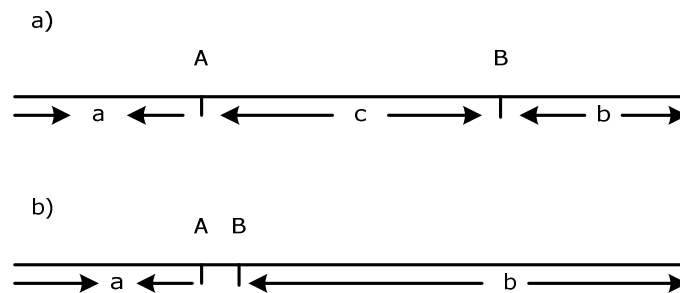
Princip tržišnog potencijala je najvažniji u lokaciji sa maksimalnim prihodom pod f.o.b formiranjem cena.

Dakle, ako se ignorišu razlike u proizvodnim troškovima lokacije, preostaju tržišni razlozi za razmatranje lokacije. Ako se proizvod prodaje na celom tržištu po istoj ceni isporuke, tada se pronalazi lokacija u centru tržišta, i najveća tržišta imaju najviše koristi od ove lokacije. Ako se proizvod prodaje po principu f.o.b, proizvodna lokacija se pronalazi na najgušćem tržištu, jer su koristi od velikih, udaljenih tržišta manje zbog njihove daljine.

1.3.2.3 Prostorna konkurencija

Jednu od najpoznatijih izjava od konkurentnoj lokaciji u odnosu na tržištu, dao je Harold Hotelling (1929). Hotelling je razmatrao sve forme monopolske konkurencije, a ne samo one uzrokovane troškovima transporta. Na primer, ako tradicija i troškovi kampanje uzrokuju pojavljivanje malog broja političkih partija, građani će glasati za kandidata čiji je politički stav najbliži njihovim ili neće glasati uopšte. Hotelling je to primenio analogno na lokaciju. Njegove pretpostavke su ključne za analizu i rezultat:

1. Tržište je grupa potrošača koji su uniformno raspodeljeni.
2. Tržište je jednodimenzionalna linija. (slika 32a)
3. Dva proizvođača opslužuju tržište (A i B na slici 32 a) i svaki je sposoban da sam opsluži tržište.
4. Proizvođači formiraju cene po sistemu f.o.b u njihovim postrojenjima.
5. Troškovi proizvodnje su 0 za svakog proizvođača, bez obzira na lokaciju.
6. Tražnja na tržištu je u potpunosti ne elastična u odnosu na cenu ($E=0$); svaki kupac će kupiti x količinu proizvoda dnevno, bez obzira na f.o.b cenu ili cenu isporuke.
7. Svaki kupac ne preferira proizvode nijednog od dva proizvođača i kupiće x količinu proizvoda od proizvođača čija je cena isporuke manja (f.o.b cena plus transportni troškovi).



Slika 32. Hotellingov problem: prostorna konkurencija u jednoj dimenziji [14]

Pod tim pretpostavkama, isporučena količina svakog proizvođača (x_a i x_b) zavisi od relativnih cena i lokacije proizvođača. Na slici 32 a, svi potrošači na segmentu a će kupovati od proizvođača A, a svi na segmentu b će kupovati od proizvođača B, osim ukoliko proizvođači A ili B ne povećaju toliko cenu da izgube prednost za kupce. Postoji ravnoteža između cena koje povećavaju profit proizvođačima ($p_a x_a$ i $p_b x_b$). Ako dopustimo proizvođaču da se locira gde hoće, onda će on izabrati lokaciju blizu b, kako bi a bilo veće. Isto tako i proizvođač B. Stalna lokacija proizvođača je veoma blizu jedna drugoj u centru tržišta (slika 32 b).

Hotelling je napravio dva važna komentara rezultata. Prvi, ukupni troškovi transporta koji plate svi kupci će biti smanjeni, ako su dva proizvođača locirana na krajevima tržišta, tako da nijedan kupac ne mora da plati transport za daljinu veću od $l/4$. Ako su proizvođači u konkurenciji, to nisu stabilni uslovi. Drugo, tržište l može predstavljati bilo koju dimenziju umesto daljine: politička ideologija koju zastupaju dve političke partije, ili slatkoća soka od jabuke dva proizvođača.

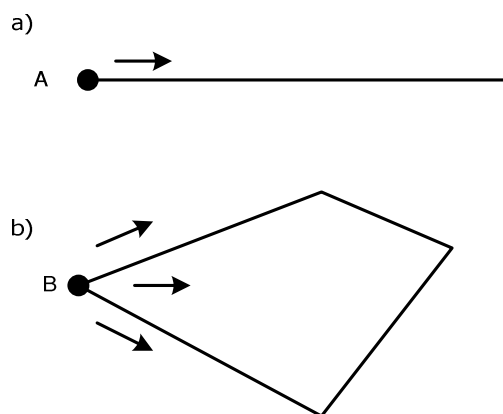
Postoje i argumenti protiv Hotellingove izjave.

Koncentrisane tržišne lokacije. Ako tržište nije uniformno raspodeljeno, prostorna konkurencija i preferencije kupaca za najnižu cenu isporuke vode proizvođača prema koncentraciji tržišta. Kao što je pomenuto, f.o.b formiranje cena vodi proizvođače ka najgušćem delu tržišta. Relevantni pokazatelji veličine i gustine tržišta ne treba da reflektuju samo lokaciju domaćinstava ili postrojenja, već i relativnu želju svakog domaćinstva za proizvodom.

Dvodimenzionalno tržište. Većina ljudskih interakcija se dešava u dve ili tri dimenzije, ali dve su najvažnije za industrijsku lokaciju. Ograničeno linearno tržište, Hotellingovog modela, povećava izolaciju perifernih lokacija. (slika 33) Proizvođač u tački A ima granice tržišta samo u jednom pravcu, a proizvođač u tački B više pravaca.

To smanjuje troškove perifernih lokacija u dvodimenzionalnom tržištu i povećava tendenciju ka disperziji proizvođača, kada je broj proizvođača koji opslužuje tržište veći od dva.

Veći broj proizvođača. Novi, treći proizvođač neće se locirati između A i B na slici 32 b. Interakcija većeg broja proizvođača povećava njihovu disperziju od duopolne situacije. Pretpostavka da je dopušteno novim proizvođačima da uđu na tržište brzo povećava disperziju proizvođača da dostigne tržišnu distribuciju.



Slika 33. Hotellingov problem: konvergencija proizvođača u centru tržišta [14]

Varijacije lokacije u proizvodnim troškovima. Što je veća razlika lokacija u proizvodnim troškovima, veća je koncentracija proizvodnje na lokacijama sa niskim troškovima. Međutim, svesnost prostorne konkurencije predlaže da isti proizvođači mogu da prevaziđu troškovne nedostatke u određenim delovima distribucije tržišta.

Elastična tražnja. Elastična tražnja čini profitno orijentisane proizvođače mnogo zabrinutijim za troškove transporta. Što je tražnja elastičnija, proizvođači su skloni većoj disperziji. Zato se očekuje da će industrije čiji proizvodi imaju mnogo substituta biti više rasprostranjene.

Takođe se očekuje da industrije gde su transportni troškovi visoki u odnosu na ukupne troškove imaju relativno rasprostranjene proizvodne lokacije. Neki kupci ne ocenjuju transportne troškove prema potrošenom novcu na transport, već prema vremenu isporuke. Ova vremensko senzitivna tražnja povećava disperziju profitno orijentisanih konkurenata na tržištu.

Različiti proizvodi. Hotellingov model pretpostavlja da je cena isporuke jedini izvor konkurencije na tržištu. Ako se proizvodi proizvođača razlikuju, potrošači imaju još neke razloge, sem cene isporuke da izaberu određeni proizvod. To utiče na lokaciju proizvodnje na dva načina. Prvi, ako se posmatraju dva proizvođača koja su udaljena, neki potrošači koji više vole proizvod A, a žive

bliže proizvođaču B, mogu zameniti proizvod B sa proizvodom A. Razlika u proizvodima je forma monopolske konkurencije, tako da će potrošači platiti premiju za svoje proizvode, ali postoje ograničenja premija (u ovom slučaju cena isporuke) koju moraju da plate. Drugo, proizvođač A lociran na krajnoj lokaciji, ne može obezbediti sve kupce koji su bliže A nego B, zbog premije koju su neki kupci spremni da plate za B proizvode. Oba uticaja povećavaju profitabilnost centralnih proizvodnih lokacija za oba proizvođača. Ako je dopušteno novim proizvođačima da uđu na tržište, kasnija disperzija proizvođača je sporija pod režimom različitih proizvoda nego pod režimom konkurentnosti cene isporuke.

U prethodnim diskusijama podrazumevala se stalna promena lokacije proizvođača. U realnim uslovima velikih troškova promene lokacije, takve investicije prave kompanije, čija postojeća postrojenja nisu dovoljno velika, i kada tržišna analiza pokaže da bi tržište bilo bolje pokriveno sa druge lokacije. U takvim slučajevima se analizira lokacija konkurenata. Odluka o klasterima blizu konkurencije ili udaljavanja od postojećih postrojenja zavisi od distribucije ciljnog tržišta, elastičnosti tržišta, varijacija u proizvodnim troškovima lokacija, neposrednosti konkurencije sa drugim postrojenjima i značaja dizajna i funkcionisanja novog postrojenja. Dinamički uslovi, kao što je mogućnost brzog rasta regiona da se poveća koncentracija tržišta, je bitan faktor koji privlači proizvođače da se lociraju, čak iako nisu najniži troškovi lokacije, u industrijama gde su transportni troškovi značaj deo proizvodnih troškova.

1.3.2.4 Veza smanjivanja troškova i prostorne konkurencije

Ako troškovi montaže i proizvodnje rastu tako dramatično u odnosu na minimiziranje troškova lokacije konkurenta zbog blizine tržišta i troškovi proizvodnje ih prevazilaze, onda će se postrojenja koja služe veoma rasprostranjenom tržištu približavati tački minimalnih troškova. Klasteri obično imaju ograničenja: na određenoj daljini od lokacije sa minimalnim troškovima, troškovi distribucije na lokalnom tržištu prevazilaze prednosti proizvodnih troškova lokacije.

Prostorna konkurencija je ključni element lokacije i ona se razmatra u pravcu koncentracije ili disperzije u odnosu na tržište. Ono što preostaje je da se odgovori koje karakteristike industrije iziskuju velike varijacije u proizvodnim troškovima lokacije?

Koje karakteristike lokacije vode do takvih razlika u troškovima? Koje karakteristike industrije povećavaju tendencije prema disperziji nadvladavanjem centralizacije? Kako te karakteristike variraju u zavisnosti od kapaciteta postrojenja, firme?

1) Karakteristike industrije

Industrije variraju u intenzitetu promene troškova na njenim potencijalnim lokacijama. Aktivnosti koje zahtevaju obradu sirovina i materijala imaju veće troškove ako se lociraju udaljeno od tih izvora sirovina. Aktivnosti koje koriste određenu radnu snagu, nemaju izbora, sem da se lociraju blizu zajednice gde ima takve radne snage. Osnova za ove aktivnosti je razmatranje koliki su penali u područjima sa ovim radnicima. Ovi penali se plaćaju u formi visokih jediničnih troškova ili ih plaćaju kupci za neposredan i brz proizvod. Proizvodnje koje imaju koristi od aglomeracije suočavaju se sa troškovima koncentracije proizvodnje. Sa druge strane, neke karakteristike industrije ohrabruju disperziju prema tržištu. Prisustvo ili ulazak više proizvođača na tržište ohrabruje disperziju na tržištu. Veoma velika sličnost proizvoda takođe vodi ka ovoj tendenciji, dok industrije koje se veoma razlikuju teže klastiranju u gušćim delovima tržišta.

2) Karakteristike okruženja

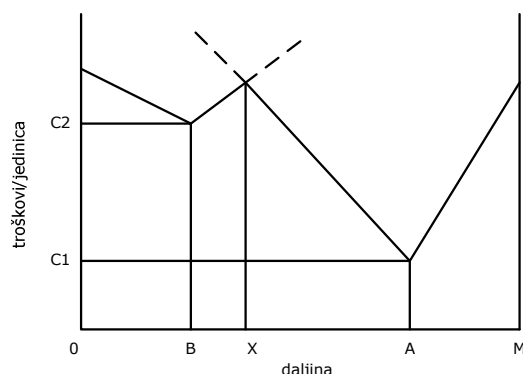
Razlike u položajima pružaju više mogućnosti za razlike u prihodima i troškovima prostora i koncentracije industrija u zavisnosti od pojedinačnih potreba. Polarna priroda mnogih zemalja sa dobrim gradskim kapitalom i velikim, jednostavnim ruralnim pograničnim zonama pruža firmama jasan izbor lokacije: grad za velika tržišta, obučenu radnu snagu i aglomeraciju i periferija za poljoprivredne i druge radove i nove radnike. Relativna razlika kritičnih ulaza – obučena i tehnička radna snaga, luke, odgovarajuća voda – u pojedinačnom okruženju motiviše koncentraciju industrije oko ulaza. Ovo sugerise odnos između geografskih razmera koje su razmatrane i koristi razlika u troškovima lokacija: na globalnom nivou, ove razlike su velike, i vode ka određenim zemljama bogatim radnom snagom ili resursima uprkos transportnim troškovima do tržišta.

Karakteristike tržišta koje se posmatra utiče na relativni značaj troškova nasuprot prihoda ili razmatranje konkurencije. Prvo i najvažnije, geografska disperzija tržišta utiče na lokaciju: prostorna konkurencija ne može da vodi do veće disperzije, nego što je tržište koje se opslužuje. Drugo, videli smo da elastičnost tražnje i cene na tržištu višestruko utiče na disperziju i značaj lokacije tržišta za konkurentnost. Tržišta se razlikuju po elastičnosti, zbog različitih ukusa, potreba, dohodaka ili mogućih substituta.

Ako takve razlike postoje na području koje se posmatra, tržište sa elastičnijom tražnjom omogućava mnogobrojne koristi.

3) Kapacitet postrojenja

U industrijama sa velikim ekonomijama obima po postrojenju, objekti malog kapaciteta sa velikim troškovima, imaju interesantnu ulogu. Njihova sposobnost rasta zavisi od nekog vida zaštite, i subvencija i donacija. To može biti među subvencija u preduzeću sa više postrojenja sa strateškim razlogom da funkcioniše sa malim troškovima u nekom postrojenju. Troškovi transporta takođe obezbeđuju zaštitu za male operacije. Slika 34, postrojenje A je prvo postavljeno, i služilo je celo tržište OM sa centralne lokacije sa jednim velikim objektom. Objekat B može da funkcioniše uspešno na ivici tržišta sa visokim troškovima i malim kapacitetom, sve dok su njegovi proizvodni troškovi (OC) manji od troškova isporuke A proizvoda na maloj, perifernoj lokaciji B. B može da zadovolji tražnju u regionu OX koje je dovoljno veliko za mali obim B. To pokazuje sposobnost malih objekata da se lociraju na periferiji tržišta i šireći se bolje nego veća postrojenja.



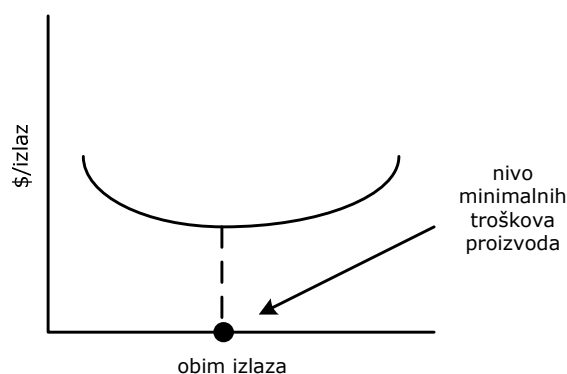
Slika 34. Efekti diferenciranja cena proizvođača u tržišnom području

Finalna implikacija je uticaj na promenljive troškova transporta. Tehnološke promene sa privatnim i javnim investicijama smanjuju troškove transporta po jedinici daljine i težine. To smanjuje monopolsku prednost zbog daljine, i smanjuje važnost svih razmatranja koja su funkcija daljine. To uključuje korak 1. u modelu minimizacije troškova, i u većini pravila prostorne konkurencije.

1.3.3 Povećavanje profita

Alternativni način kombinovanja pristupa smanjivanja troškova i povećanja prihoda je maksimizacija profita firme. Firme žele lokaciju gde je razlika između ukupnog prihoda i troškova maksimalna. S obzirom na zavisnost troškova funkcije i prihoda lokacije, ovaj problem je težak. Način da se prelomi ciklus je pojednostavljivanje problema.

1. Odrediti obim proizvodnje. Odrediti najpre obim operacija. To može biti nivo na kome prestaje opadanje prosečnih troškova sa kapacitetom objekta. (slika 35)



Slika 35. Dugoročni prosečni troškovi

Fraza minimalni obim ekonomije opisuje kapacitet postrojenja iznad kojeg ne opadaju troškovi. Alternativno, preduzeće razmatrajući investicije želi da napravi malo postrojenje, zbog kapitalnih konstanti ili zbog subvencija koje će imati, malo preduzeće.

Pitanje je gde takvo postrojenje može biti locirano, sa obzirom na ulaze, tržište i konkurente, kako bi maksimiziralo razliku između ukupnih troškova i prihoda?

2. Identifikacija tržišnog područja da bi zadovoljili spisak zahteva. To se može postići prvo identifikacijom tržišta, a onda i minimizacijom troškova određene lokacije u odnosu na tržište. Koji je opseg lokacija sa kojeg se tržište odgovarajuće veličine može kontrolisati po određenoj ceni? To zavisi od tržišnog područja koje može biti opsluženo sa lokacije, datih transportnih troškova i elastičnosti tražnje na cenu isporuke, od gustine tržišta u području i tržišnog udela koje postrojenje može kontrolisati u zavisnosti od postojeće konkurencije.

3. Identifikacija lokacije sa minimalnim troškovima na tržištu i prilagođavanje potrebama i tržištu. Unutar opsega, gde su najniži troškovi? Da li f.o.b cena dozvoljava da se opsluži veliko tržište po preovlađujućim cenama transporta? To se može postići nižim troškovima isporuke i širim tržišnim područjem ili porastom tržišnog udela zbog bolje strukture troškova od konkurencije. Šta se dešava ako ukupni troškovi malo porastu sa povećanjem postrojenja kako bi zadovoljilo veće tržište – da li će se oni povećati više nego prihod? Onda ne pokušavajte da

opslužite veće tržište. Da li će se povećati manje od prihoda od proširenog tržišta ? Onda povećajte kapacitet postrojenja.

Kombinovanje ova dva pristupa bi bilo ograničeno i neprimenljivo u realnom svetu donošenja inkrementalnih investicionih odluka koje prave složena preduzeća sa ograničenim informacijama o ulazima, troškovima, konkurentima i tržištima.

1.4 Faktori koji utiču na izbor lokacije

U literaturi postoji veliki broj klasifikacija faktora koji utiču na izbor lokacije. Selekcija faktora koji će se razmatrati pri odabiru lokacije je ključna faza u postupku izbora lokacije. Dakle, faktori su od presudnog značaja za dobijanje "pravog" rešenja. Zato se posebno poglavlje u knjizi posvećuje ovoj značajnoj oblasti.

Najčešća podela lokacionih faktora podrazumeva tri osnovne grupe, i to:

1. Faktore države/kontinenta;
2. Faktore regiona/zajednice;
3. Faktore položaja. [15]

Zbog globalizacije i rasta izvoza, raste broj stranih kupaca i tržišta postaju međunarodna. Sve je izraženiji trend lociranja preduzeća u stranim zemljama. Zato se javila potreba da se prilikom izbora lokacije, najpre izabere kontinent ili država u kome će se smestiti preduzeće ili postrojenje. Lociranje u stranim zemljama zahteva velike troškove, a to čini ove faktore veoma važnim.

Faktori države su grupisani na sledeći način:

1. Politički faktori;

U ovu grupu spadaju politički rizici, pravila vlade, olakšice itd. Prilikom izbora države veoma je važno utvrditi njenu stabilnost i stav vlade prema određenoj industriji. Pored toga, mora se razmotriti učestalost promene stavova, u pogledu poreza i olakšica, jer svaka promena utiče na troškove i atraktivnost lokacije.

2. Kulturni i ekonomski faktori.

Kultura predstavlja najveći izazov sa kojim se suočava preduzeće u novom okruženju. Ona utiče na sve druge faktore, a posebno na radnu snagu i njeno ponašanje, kao i na ponašanje snabdevača i svih stakeholdera. Ekonomski faktori koji se posebno analiziraju su kamatne stope i stabilnost valute. U nestabilnim državama one se često menjaju i mogu negirati sve ostale uštede. Ekonomski faktori često mogu biti presudni, ali i nestabilni, tako da u jednom trenutku određena država može biti najpovoljniji izbor, a za dve godine loš izbor.

3. Blizina tržišta;

Blizina tržišta je faktor koji presudno utiče na izbor lokacije uslužnih preduzeća (prodavnice, frizer, restoran). Uslužna preduzeća se moraju smestiti blizu potrošača. Kod proizvodnih organizacija, to je značajan faktor u slučaju velikih transportnih troškova, kvarljivih ili lomljivih i teških proizvoda.

4. Dostupnost sirovina, komunikacija, energije, saobraćajnica;

Blizina tržišta sirovina je bitan faktor za proizvodna preduzeća, jer utiče na transportne troškove, i opet se mora uzeti u obzir kvarljivost sirovina i obim tovara. Preduzeća koja se bave preradom teških metala, blizina sirovina je presudan faktor (prerada uglja, čelika). Posebno se mora voditi računa o raspoloživosti sirovinama, jer one nestaju, pa može doći do zahteva za promenom lokacije. Pored sirovina, analiziraju se i telekomunikacione veze, dostupnost energije i raspoloživost i blizina saobraćajnica (brodski, drumski, železnici, avio transport).

5. Blizina konkurencije;

Poslednjih godina javlja se trend lociranja preduzeća u blizini konkurenata. Takve grupe se nazivaju klasteri. Javljaju se najčešće kada se u nekom regionu nalazi glavni resurs za određenu industriju. To mogu biti prirodni, informacioni, kapitalni resursi i talenti. Primer su lanci brze hrane, softverske kompanije u Slikinskoj dolini, Francuska gde se smeštaju proizvođači vina, Grand kafa u Brazilu itd. [15] Lokacioni faktori koji utiču na formiranje klastera u nekoj državi ili regionu su sledeći: sirovinaska osnova, transportni troškovi, tržište, neizvesnost, automatizacija ili mehanizacija itd. Pored njih, mogu se izdvojiti faktori koji utiču na širenje (disperziju) industrije u različite regione: energija, sredstva komuniciranja, zemljište, ekološki zahtevi itd. Postoje i faktori koji mogu uticati i na formiranje klastera i na širenje industrije u zavisnosti od tipa industrije. To su: radna snaga, saobraćaj, snabdevanje vodom, veličina objekta, uticaj vlade itd.

6. Karakteristike radne snage;

Karakteristike radne snage podrazumevaju njenu raspoloživost, stavove, produktivnost i troškove. [15] Prethodno je navedeno da nacionalna kultura utiče na ponašanje radnika i stavove u pogledu odsustvovanja sa posla. Zemlje jeftine radne snage su atraktivne za lociranje preduzeća. Međutim, to je faktor koji se ne sme razmatrati nezavisno od ostalih, jer je jeftina radna snaga često manje produktivna, radnici su loše obučeni, nekvalifikovani ili često odsustvuju sa posla. To značajno smanjuje efekat uštede u troškovima radne snage. Zato se mora analizirati i produktivnost radne snage, odnosno odnos produktivnosti i plate radnika. Na primer, ako Fabrika 1 plaća 1200 dinara dnevno za 100 proizvedenih jedinica u Beogradu, potrošiće manje na radnike nego niška fabrika koja plaća 800 dinara na dan sa produktivnošću 50 jedinica dnevno:

$$\frac{\text{Troškovi radne snage na dan}}{\text{Produktivnost}} = \text{troškovi po jedinici(125)}$$

Slučaj 1: Fabrika u Beogradu

$$\frac{1200 \text{ din dnevno}}{100 \text{ jedinica dnevno}} = \frac{1200 \text{ din}}{100} = 12 \text{ din po jedinici}$$

Slučaj 2: Fabrika u Nišu

$$\frac{800 \text{ din dnevno}}{50 \text{ jedinica dnevno}} = \frac{800 \text{ din}}{50} = 16 \text{ din po jedinici}$$

7. Prirodni uslovi.

Prirodni uslovi nisu od ključnog značaja za izbor lokacije, ali se moraju razmatrati u zavisnosti od države ili kontinenta. Klima utiče na potrošnju energije, a samim tim i na troškove poslovanja.

Svetski Ekonomski Forum je izvršio istraživanje u kome je analizirao lokacionu konkurentnost 75 zemalja, na osnovu ispitivanja 4000 menadžera. Finska je prva 2001. godine zbog svojih velikih ušteda i investicija, otvorenosti za trgovinu, kvaliteta obrazovanja i efikasnosti Vlade.

Zemlja	Rangiranje 2001.
Finska	1
U.S.	2
Holandija	3
Nemačka	4
...	...
Kanada	11
Japan	15
...	...
Brazil	30
...	...
Rusija	58
...	..
Bolivija	75

Tabela 3. Globalna kompetitivnost izabranih 75 zemalja bazirano na godišnjim anketama 4000 preduzeća [78]

Kada se kompanija odluči za zemlju koja je najbolja za lokaciju, fokusira se na izbor zajednice. Kompanija mora da izabere jednu lokaciju koja je najbolja za isporuku, prijem, kapacitet postrojenja i troškove.

Faktori regiona/zajednice su sledeći:

1. Atraktivnost regiona. Atraktivnost regiona podrazumeva kulturu, poreze, klimu i ostalo što čini region manje ili više atraktivnim. Ovaj faktor nije presudan, već daje samo smernice za izbor regiona u okviru države ili kontinenta.
2. Stimulacije Vlade. Stimulacije Vlade predstavljaju olakšice koje Vlada propisuje, kako bi se motivisali privrednici da svoja postrojenja smeštaju u određenom regionu, ili obaveze koje opterećuju dodatno privrednike, kako bi se destimulisao njihov rad u određenom regionu. Takođe se analiziraju i porezi na zarade zaposlenih, jer oni mogu varirati kao posledica politike regiona.
3. Ekološke regulative grada. Ekologija je veoma značajan faktor i donose se različiti zakoni i regulative koji se odnose na zaštitu životne sredine. U nekim regionima su strožiji propisi, veće takse i kazne, što izaziva veće varijabilne troškove, ali i troškove izgradnje (posebna oprema, filteri itd).
4. Radna snaga. U okviru izbora regiona, detaljnije se razmatra radna snaga u pogledu njene raspoloživosti i stavova. Povoljnije je ukoliko ima više raspoložive, kvalifikovane, radne snage u odnosu na broj radnika koji je potreban preduzeću, i ako preduzeće nije jedino u regionu, što bi dovelo do velikih posledica u slučaju zatvaranja istog. U stranim zemljama, veliku ulogu imaju i sindikati i stav radnika prema sindikalnim organizacijama. U SAD-u je izvršeno istraživanje u kome je utvrđeno da je u regionima gde postoji veći broj sindikalnih organizacija, veća prosečna

zarada zaposlenih. U našoj zemlji, sindikati se razvijaju i počinju značajnije da utiču na ponašanje, zaštitu i svest radnika.

5. Blizina sirovina i potrošača. U ovoj fazi se detaljnije analizira blizina izvora sirovina, cena i njihova raspoloživost, kao i blizina potrošača, njihova kupovna moć i ponašanje.

6. Troškovi zemljišta/izgradnje. Troškovi zemljišta/izgradnje imaju veliko učešće u ukupnim troškovima premeštanja ili izgradnje novih objekata. Ovi troškovi se značajno razlikuju od regiona do regiona. U slučaju ograničenih finansijskih sredstava mogu biti i osnovni faktor izbora regiona.

Faktori položaja su sledeći:

1. Veličina i troškovi položaja. U slučaju da se u potpunosti grade novi objekti na položaju, razmatra se da li veličina položaja odgovara potrebnim kapacitetima preduzeća i koliko košta sama lokacija.

2. Karakteristike položaja. Analiziraju se geografske karakteristike zemljišta: isušivanje, vegetacija, nagib tla, estetski izgled položaja itd.

3. Raspoloživost lokacije. Raspoloživost lokacije pokazuje da li se radi o slobodnom zemljištu ili postoje objekti na položaju. Ukoliko postoje objekti, razmatra se da li će zadovoljiti potrebne kapacitete, da li postoji odgovarajuća oprema, da li potrebna rekonstrukcija ili rušenje i koliki su troškovi dodatnih radova.

4. Infrastruktura. Analizira se vodovodni sistem, raspoloživost električne energije i instalacije, raspoloživost gasa i mogućnost grejanja, blizina saobraćajnica, aerodroma, pruge, železnice, prilaz položaju, širina ulice, mogućnost parkiranja, itd.

5. Zakonske prepreke. Prilikom izbora položaja ispituje se da li postoje određene zakonske prepreke za izgradnju, rekonstrukciju ili rad preduzeća. Preispituju se i restrikcije koje se uvode na određenom položaju i da li u budućnosti ima potreba za promenama na odabranoj lokaciji.

6. Okruženje. Okruženje je bitan faktor svake lokacije, gde se analizira da li postoje komercijalni i industrijski objekti koji pružaju podršku za obavljanje izabrane delatnosti., kakav je javni transport (utiče na ponašanje radne snage), da li postoji podrška za obuku i rekreaciju radnika, kakav je stav okruženja prema novom objektu itd.

Druga značajna klasifikacija deli lokacione faktore u dve grupe:

1. Interne - oni koji se odnose na samu lokaciju i vlasnik ima veliki uticaj na njihovu promenu;
2. Eksterni - faktori koji se nalaze van granica lokacije i vlasnik nema uticaja na njih.

Svaki od ovih faktora se može podeliti na:

1. Materijalne - one koji su "opipljivi", i
2. Nematerijalne - teže se definišu i obuhvataju socijalne, političke faktore (meki faktori). [2]

Lokacioni faktori	Materijalni	Nematerijalni
Interni	Topografija Vlažnost zemljišta Postojeće zgrade	Pejzaž Spoljašnji izgled Stil gradnje

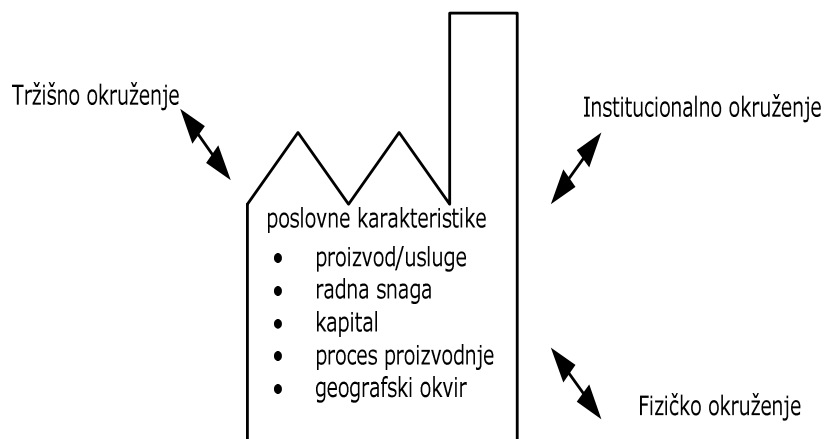
	Kanalizacija	Oblik lokacije
Eksterni	Blizina puteva Blizina aerodroma Delatnost susednih firmi Vrste vetrova Blizina naseljenog dela Javni prevoz	Dozvola za gradnju Politička situacija Policijska i vatrogasna zaštita Položaj susednih firmi Radna snaga Prirodna ograničenja Pitanja vezana za očuvanje okoline Poreske olakšice Politička i ekonomska stabilnost Troškovi proizvodnje

Tabela 4. Klasifikacija lokacionih faktora [2]

Autor u [23] izdvaja dve uticajne grupe faktora izbora lokacije:

1. Faktore poslovnog okruženja; i
2. Faktore koji se odnose na karakteristike poslovanja samog preduzeća.

Termin poslovno okruženje može se objasniti kao "svet van preduzeća veliki onoliko koliko ima relevantni ili odlučujući uticaj na funkcionisanje poslovanja" (Wissema, 1988). Lambooy deli poslovno okruženje na tri dimenzije: tržišno okruženje (sa komercijalnim/tržišnim odnosima), fizičko okruženje i institucionalno okruženje. (slika 3) Za svaku vrstu okruženja vezuju se različiti faktori koji utiču na izbor lokacije. [23]



Slika 36. Poslovno okruženje i poslovne karakteristike [11]

U literaturi se izdvajaju tri osnovne grupe faktora poslovnog okruženja: faktori guranja - "push" faktori, faktori povlačenja - "pull" faktori i faktori zadržavanja - "keep" faktori.

Push faktori, kao što sama reč kaže, "guraju" ili usmeravaju preduzeće ka odluci da promeni lokaciju.

Nasuprot tome, *pull* faktori privlače preduzeće da se pomeri na određenu lokaciju. Obe vrste faktora utiču da preduzeće promeni lokaciju. Faktori zadržavanja sprečavaju preduzeće da promeni lokaciju. [23]

Najčešći faktori guranja su:

- nedostatak prostora - javlja se kao rezultat rasta obima poslovanja, osvajanja novih tržišta;
- siromašna ili ne odgovarajuća zgrada - nedostatak parking prostora, loši radni uslovi.

Najvažniji *pull* faktori za preduzeća su:

- višak prostora za širenje - nedostatak prostora kao *push* faktor je ujedno i *pull* faktor jer se zahteva više prostora na novoj lokaciji,
- strateški dobra pozicija - posebno važan faktor za logistička i komercijalna preduzeća,
- dobra pristupačnost - blizina puta i javnog transporta.

Nasuprot navedenim faktorima, *keep* faktori zadržavaju preduzeće na postojećoj lokaciji. Najvažniji *keep* faktor je ljudski kapital. U velikim preduzećima se zapošljava visokokvalifikovana radna snaga koju je teško naći. Radnici teško napuštaju postojeću sredinu, a sa druge strane teško je ponovo pronaći stručne radnike i visoki su troškovi njihovog ponovnog obučavanja. U industrijama gde radna snaga ima veliku ulogu, teško se donosi odluka o promeni lokacije.

U zavisnosti od sektora i veličine preduzeća, menja se značaj pojedinih faktora u izboru lokacije. Tako, na primer, proizvodna preduzeća smatraju nedostatak prostora važnijim kriterijumom od logističkih ili uslužnih preduzeća. Mala preduzeća dozvoljavaju da na njih više utiče činjenica da se ne uklapaju dobro u okruženje trenutne lokacije, a veća preduzeća više važnosti pridaju širim poslovno-ekonomskim interesima. Važnost ljudskog kapitala u malim i srednjim preduzećima je veća nego u velikim kompanijama.

U drugu grupu spadaju karakteristike poslovanja koje određuju faktore i mogu se podeliti u tri kategorije (vidi sliku 36):

- proizvodi/usluge - karakteristike proizvoda utiču na proces proizvodnje i odabir lokacije, kada se proizvod mora isporučiti brzo, pristupačnost je važan faktor lokacije. U praksi to uobičajeno znači da je preduzeće locirano blizu puta, u blizini pruge ili luke;
- radna snaga - kvalifikacije i stručnost zaposlenih utiču na zadržavanje ili promenu lokacije,
- kapital - preduzeća sa visokim fiksnim troškovima, zbog visokih troškova biće manje zainteresovani za pomeranje;
- proces proizvodnje - ako je fleksibilnost važan zahtev u procesu proizvodnje, tada će preduzeće biti spremno da se pomera kako bi odgovorilo na promene u tržišnoj situaciji;
- geografski okvir - međunarodno orijentisano poslovanje (u transportnom sektoru, npr.) ima druge zahteve kada bira lokaciju u odnosu na uslužni sektor (advokat, npr.) koji obično zadovoljava lokalne potrebe. [23]

1.5 Postupci, metode i modeli izbora lokacije

U literaturi postoji veliki broj različitih metodologija za izbor lokacije. One su međusobno slične u početnim fazama koje se odnose na izbor pojedinačne lokacije. Osnovna razlika između metodologija je u širini problema koji rešavaju. Osim izbora lokacije, pojedine metodologije obuhvataju i globalni i detaljni razmeštaj objekata na izabranoj lokaciji, a ukoliko je u pitanju proizvodni sistem i razmeštaj radnih mesta u okviru pogona.

Mogu se izdvojiti dve globalne faze u izboru lokacije i razmeštanju objekata:

1. Izbor lokacije;
2. Razmeštaj objekata na izabranoj lokaciji;

Detaljnija podela obuhvata tri faze:

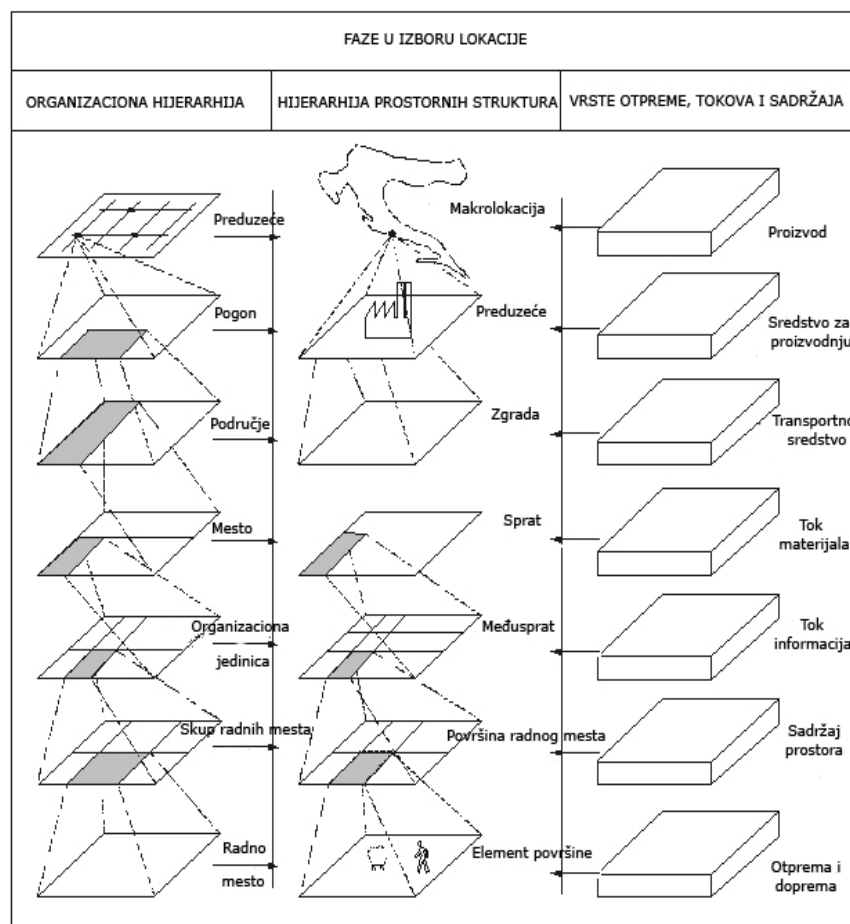
1. Izbor regiona (makrolokacija);
2. Izbor položaja (mikrolokacija);
3. Razmeštaj objekata na izabranoj lokaciji;

Zbog trenda širenja na inostranim tržištima i potrebe proširenja i osvajanja novih tržišta, mogla bi se izdvojiti još jedna faza pre navedenih, a to je izbor kontinenta ili države. Takođe, u slučaju izbora lokacije za proizvodni sistem, može se dodati peta faza - određivanje položaja radnih mesta u pogonu.

Dakle, sveobuhvatni postupak izbora lokacije i razmeštaja ima sledeće faze:

1. Izbor države (kontinenta);
2. Izbor regiona (makrolokacija);
3. Izbor položaja (mikrolokacija);
4. Razmeštaj objekata na izabranoj lokaciji;
5. Određivanje položaja radnih mesta u pogonu.

Sve faze su povezane i rezultat jedne faze predstavlja ulaz za narednu fazu.



Slika 37. Faze u izboru lokacije [77]

Prve tri faze su slične, a za pronalaženje ključnog područja razlikuju se faktori koji utiču na izbor. U prethodnom poglavlju su nabrojani faktori koji se razmatraju prilikom izbora države, regiona i položaja objekta bilo koje vrste (fabrika, skladište, prodavnica).

Autori u [77] posebno izdvajaju dve grupe faktora koje utiču na izbor regiona proizvodnog sistema: društveno-političke i proizvodno-ekonomske.

Društveno-politički faktori su:

1. Uklapanje projekta u perspektivne planove regionalnog razvoja. Vršiti se ispitivanje da li je projekat prioritetan i da li doprinosi razvoju regiona.
2. Uklapanje nove fabrike u nacionalni sistem. Trend je u razvijenim zemljama da velika preduzeća vrše samo montažu, a da delove izrađuju kooperanti. Zato se lociranje pogona često vrši u gradovima zbog bolje komunikacije ili u regionima koji su dobro povezani sa postojećim objektima. [77]

Proizvodno-ekonomski faktori su:

1. Tržište nabavke i prodaje.
2. Snabdevanje energijom, vodom i gorivom.

3. Radna snaga.

4. Prirodni uslovi - klima, vlažnost, čistoća vazduha. Oni direktno utiču na troškove investicije i proizvodnje. Područja s kontinentalnom klimom, gde je velika temperaturna razlika zahtevaju povećane troškove za klimatizaciju (može se pojaviti problem pri proizvodnji predmeta rada koji su osetljivi na promenu temperature). Područja s velikim prosečnim snežnim padavinama zahtijevaju izgradnju velikih skladišta, zbog otežane nabavke u zimskom periodu. Vlažnost vazduha je značajna, posebno pri projektovanju proizvodnih sistema za tekstilnu i prehrambenu industriju (zahtev za povećanom vlažnosti), ili metalnu i drvenu industriju, kao i preciznu mehaniku (zahtev za što manjom vlažnosti). Čistoća vazduha utiče na lokaciju proizvodnih sistema, npr. fine mehanike, itd.

Pored navedenih kriterijuma, autori u [77] navode osnovne kriterijume za izbor položaja:

1. Površina zemljišta. Površina potrebnog zemljišta se određuje na osnovu površine svih potrebnih objekata i ona treba da čini 30-50 % ukupne površine položaja, a ostalo je namenjeno proširenju.
2. Konfiguracija tla. Potrebno je obratiti posebnu pažnju na nagib zemljišta. Ukoliko je veći nagib potrebno je izravnjanje, što zahteva određene troškove, ili se zgrade mogu odvojiti, što kasnije otežava komunikaciju. Manji nagib zemljišta je pogodniji za izgradnju.
3. Nosivost zemljišta i hidrološka svojstva. Mora se ispitati nosivost zemljišta zbog površine objekata, mogućnosti izgradnje i poniranja zemljišta, kao i hidrološka svojstva.

4. Infrastruktura.

5. Zone stanovanja. Potrebno je ispitati zone stanovanja i udaljenost stambene zone i javnog prevoza od fabrike. Gornja granica vremena potrebnog za dolazak radnika na posao ne bi trebala biti iznad 45 minuta, a preporučljivo je da bude do 30 minuta. Analize se sprovode pomoću "izokrona" (linije na karti koje predstavljaju istovremene dolaske radnika na posao). [77]

Postupak izbora države, regiona ili položaja je sličan i najčešće se sastoji iz sledećih aktivnosti:

1. Prikupljanje potrebnih informacija - U ovoj fazi se prikupljaju sve informacije koje se odnose na zahteve lokacije, kao razloge za napuštanje postojeće lokacije. Svi zahtevi se klasifikuju u jednom dokumentu, najčešće prema opisanoj podeli na materijalne i nematerijalne i eksterne i interne (tabela 4) čime se smanjuje mogućnost da se propusti određeni važan uticajni faktor;
2. Identifikacija potencijalnih kandidata (država, regiona, položaja) - U skladu sa definisanim zahtevima nove lokacije pronalaze se potencijalni kandidati. Pretragu obavljaju eksperti za pronalaženje lokacija;
3. Određivanje faktora i kriterijuma za izbor - U zavisnosti od toga da li se bira država, region ili položaj, delatnosti i veličine preduzeća određuju se faktori i kriterijumi za vrednovanje kandidata;
4. Vrednovanje kandidata - Ocena potencijalnih lokacija se vrši primenom različitih metoda. Najčešće se primenjuju metoda bodovnog ocenjivanja, metod težinskih faktora, simulacije, finansijske analize, itd. U slučaju izbora države i regiona primenjuju se bodovna metoda i metod težinskih faktora zbog jednostavnosti i raspoloživosti informacija. Za izbor lokacije položaja primenjuju se i brojni modeli koji će biti kasnije opisani;

5. Finalni izbor - Kada se završi vrednovanje kandidata prelazi se na njihovo rangiranje i konačni izbor. Ona lokacija koja zadovoljava najveći broj uticajnih faktora sa određenim prioritetima je konačno rešenje.

Nakon izbora položaja, potrebno je izvršiti prostorno planiranje i napraviti globalni razmeštaj objekata na lokaciji.

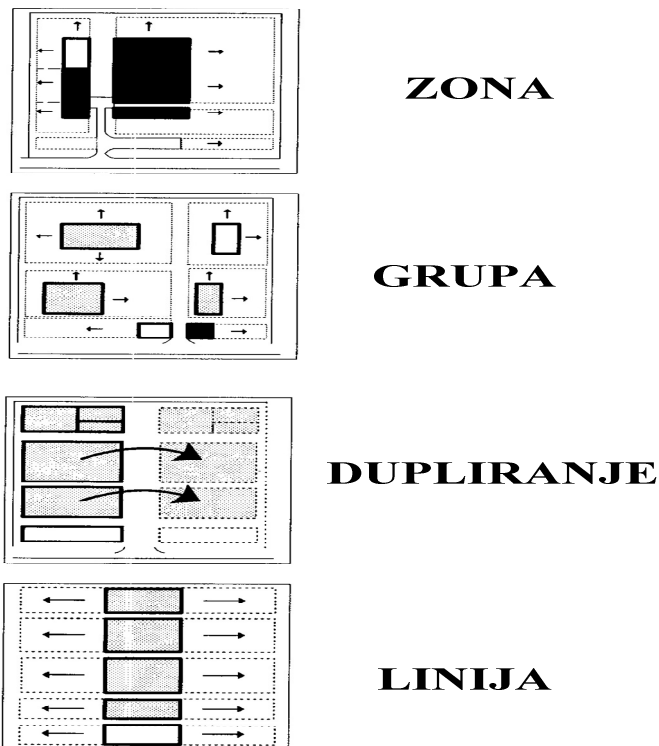
Prostorni plan pokazuje način upotrebe zemljišta kako danas tako i u budućnosti. Prostorni plan prikazuje fizički rezultat poslovne strategije, pokazuje način upotrebe prostora, transportnih putanja u okviru lokacija, korisnost i mogućnost proširenja. Prostorno planiranje za definiše položaj zgrada, putanja unutar lokacija i mnoge druge karakteristike. [2]

Prilikom prostornog planiranja, posebna pažnja se obraća na fleksibilnost prostora i mogućnosti proširenja u slučaju razvoja preduzeća. To je faktor koji je često presudan u izboru položaja, jer se lokacija menja usled nedostatka prostora na postojećem položaju.

Na primer, pristaništa su veoma skupa, tako da ona moraju biti postavljena na takvo mesto, gde na njih neće uticati buduća proširenja. Nasuprot tome, montažne radionice su lake za pomeranje tako da njihova pozicija nije kritična. Fleksibilnost prostora kao i troškovi premeštanja se moraju razmatrati. Fleksibilnost poslovnih objekata je mala, ukoliko imaju specijalizovane mašine i izlaz su veoma složeni proizvodi. Fleksibilnost poslovnih objekata se povećava ukoliko proizvode jednostavnije proizvode i imaju jednostavnije mašine.

Kako bi se napravio razmeštaj objekata na položaju, potrebno je identifikovati i popisati sve poslovne jedinice po vrstama i broju, koje je potrebno rasporediti. Nakon toga, primenjuju se različite forme razmeštaja.

Najčešće forme globalnog razmeštaja su: zonski, grupni, dupli, linijski. Slika 38. prikazuje ove tipove planiranja.



Slika 38. Tipovi planova globalnog razmeštaja. [2]

“Zonski plan počinje sa središtem lokacije. Svaka poslovna jedinica, funkcija ili aktivnost imaju srodnu zonu. Proširenja unutar zone imaju unapred definisane granice. Zonsko planiranje dozvoljava povećanje sve do trenutka dok to ne utiče na organizaciju proizvodnje. Ipak, poslovne jedinice tokom vremena postaju sve veće i veće. Mogu se javiti problemi u upravljanju i kontroli, naročito ako njihov rast izaziva i povećanje asortimana.

Grupno planiranje počinje sa imenovanjem grupe svake funkcije. Svaka zgrada može biti povećana u okviru svoje grupe. Grupno planiranje je dobro kada su poslovne jedinice organizacija samo za sebe.

Dupli plan počinje sa primarnom zgradom koja se kopira, duplira, na obližnji prostor. Ovaj plan izbegava probleme povećane razmere, ali znači i povećanje kapaciteta ukoliko su u pitanju velika preduzeća.

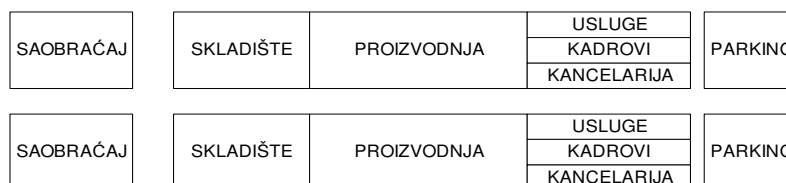
Linijski plan je posebna vrsta zonskog plana, gde se svaka poslovna jedinica razvija vodoravno. Ovo je dobar pristup za jednostavne linearne procese, ali se ne može koristiti za složenije procese i proizvode.” [2]

Pored navedenih, poslovne jedinice se mogu grupisati prema funkciji, proizvodima, tipovima zgrada ili posebnim zahtevima.

Posebna pažnja prilikom razmeštaja se obraća na položaj proizvodnog pogona, ukoliko je u pitanju proizvodno preduzeće. Položaj pogona određuje sa aspekta veze sa kooperantima, mogućnosti priključivanja u saobraćaj, a naročito sa aspekta jačine i pravca vetrova. U zavisnosti od pravca vetrova i položaja stambenih naselja, određuje se položaj pogona na lokaciji. [77]



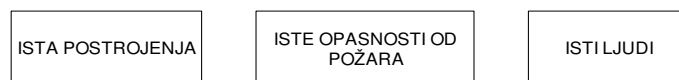
PREMA FUNKCIJI



PREMA PROIZVODU



PREMA TIPU ZGRADE



PREMA POSEBNIM ZAHTEVIMA

Slika 39. CPU grupisanje [2]

1.5.1 Metode izbora lokacije

Postoji nekoliko podela metoda koje se koriste pri izboru lokacije. One se mogu podeliti u dve grupe, prema broju objekata:

1. Metode utvrđivanja individualnih lokacija - Tu spadaju metode za određivanje lokacije jednog objekta, preduzeća, pogona, skladišta itd;
2. Metode utvrđivanja grupnih lokacija - Odnosi se na metode utvrđivanja lokacije industrijskih zona i kompleksa koje obuhvataju veliki broj objekata koji je potrebno smestiti na određenom položaju.

Data je druga značajna podela prema načinu rešavanja problema na:

1. Uporedne lokacione metode - Izbor lokacije se vrši poređenjem više unapred odabranih lokacija;
2. Metode izbora optimalne lokacije - Određivanje optimalne lokacije kao funkcije dva ili više lokacionih faktora.

Osnovne metode koje se najčešće koriste prilikom izbora lokacije su sledeće:

- Metod bodovnog ocenjivanja;
- Metod ponderisanja;
- Metod transportnih troškova;
- Metod investicionih ulaganja;
- Metod mreže (centra gravitacije);
- Break-even analiza lokacije;
- Transportni metod.

1.5.1.1 Metod bodovnog ocenjivanja

Metoda koja se posebno izdvaja za rešavanje problema izbora lokacije je *bodovno ocenjivanje*. To je vrlo jednostavna metoda za primenu i omogućava brzo donošenje odluke.

Spada u grupu uporednih metoda, jer se odluka donosi na osnovu unapred odabranih lokacija. Primena ove metode se sastoji iz nekoliko faza:

1. Prikupljanje informacija o alternativnim lokacijama i faktorima.
2. Definisane alternativnih lokacija.
3. Definisane faktora za ocenjivanje alternativnih lokacija.
4. Definisane bodovnog sistema.
5. Ocenjivanje alternativnih lokacija po faktorima.
6. Izbor najpogodnije lokacije.

Tabela 5. prikazuje primer ocenjivanja alternativnih lokacija pomoću bodovnog ocenjivanja.

Faktori za izbor lokacije			Alternativne lokacije				
Red. br.	Oznaka	Zahtevi	A	B	C	D	E
1.	Spoljna politika	orijentisanost prema državama iz EU	2	2	2	2	2
2.	Ekonomska politika	liberalna, slobodna trgovina	0	2	1	2	0
3.	Finansijska politika	slobodan protok kapitala	2	2	0	2	1
4.	Radna snaga	obrazovani radnici	1	0	2	2	0
5.	Saobraćaj na makrolokaciji	putevi, železnički saobraćaj	0	1	0	1	2
6.	Prodajno tržište	blizina prodajnog tržišta	0	2	1	2	1
7.	Vlast	spremnost na kooperativnost	2	2	1	1	0

8.	Zemljište	ravno, tvrdo, suvo	2	0	2	2	0
10.	Energija	minimalno 10 kVA	2	0	0	1	0
11.	Troškovi	maksimalno 200 n.j/m ²	0	1	0	2	1
UKUPNO:			11	12	9	17	7

Tabela 5. Ocenjivanje alternativnih lokacija pomoću bodovnog ocenjivanja [77]

Značenje ocena: 2 - ispunjava zahtev u potpunosti, 1 - delimično ispunjava zahtev, 0 - ne ispunjava zahtev.

Maksimalan broj bodova (17) u ovom primeru dobila je lokacija D.

Definisanje bodovnog sistema se može menjati u zavisnosti od tipa problema. Bodovni sistem može obuhvatiti ocene od jedan do pet i na taj način omogućiti preciznije rangiranje alternativnih lokacija. Što je veći bodovni opseg, preciznija je odluka.

Nedostatak ove metode je što se oslanja na subjektivnu ocenu tima za izbor lokacije, kako za izbor faktora i alternativnih lokacija, tako i za ocenu alternativa.

1.5.1.2 Metod težinskih faktora (ponderacije)

Postoje mnogi faktori, kvalitativni i kvantitativni, koji se razmatraju prilikom izbora lokacije. Neki faktori su važniji od drugih, pa menadžeri koriste težinske koeficijente da bi proces odlučivanja bio objektivniji. Metod težinskih faktora je popularan zbog raznovrsnosti faktora, od edukacije do odmora i veština radnika. U [15] navode se neki od mnogih faktora koji utiču na lokaciju.

To su:

Troškovi radne snage (uključujući plate, sindikate, produktivnost);

Raspoloživost radne snage (uključujući stav, godište, raspodelu, veštine);

Blizina sirovina i snabdevača;

Blizina tržišta;

Poreska politika Vlade (uključuje olakšice, poreze, odštetu nezaposlenih);

Regulative okruženja;

Sredstva (gas, energija, voda i njihovi troškovi);

Troškovi lokacije (zemlja, proširenje, parking, kanalizacija);

Upotrebljivost transporta (pruga, avion, reka, magistrale);

Kvalitet života u zajednici (uključuje nivoe obrazovanja, troškove života, zdravstvenu negu, sportove, kulturne aktivnosti, transport, održavanje, zabavu, crkve);

Spoljna trgovina (odnosi, stabilnost);

Kvalitet Vlade (stabilnost, poštenje, odnos prema novim poslovima – bilo stranim bilo domaćim).[15]

Metod težinskih faktora ima 6 koraka:

1. Izrada liste relevantnih faktora koji se nazivaju kritični faktori uspeha.
2. Dodela težina svakom faktoru prema značaju za ciljeve kompanije.
3. Izrada skale za svaki faktor (na primer od 1 do 10 ili od 1 do 100).
4. Ocena svake lokacije po svakom faktoru koristeći skalu iz prethodnog koraka.
5. Množenje ocene sa faktorom i računanje ukupnog rezultata za svaku lokaciju.
6. Preporučiti lokaciju na osnovu maksimalnog rezultata.

Najvažniji korak je određivanje liste relevantnih faktora koji utiču na izbor lokacije određenog objekta. Ovi faktori se razlikuju i u zavisnosti od toga da li se vrši izbor regiona, države ili grada.

Kada je odluka osetljiva na manje promene, trebalo bi vršiti dalju analizu težina i faktora. Menadžment može zaključiti da ovi neopipljivi faktori nisu odgovarajući za donošenje odluke o lokaciji. Zato se daje važnost kvantitativnim aspektima odluke.

Metod težinskih faktora spada u grupu metoda individualnih lokacija i komparativnih metoda, jer se njenom primenom porede predložene lokacije i vrši izbor između njih, a bira se ona koja ima najveći rezultat.

Na sledećem primeru je prikazana primena ove metode.

Kineski proizvođač automobila, odlučio je da otvori jedno prodajno mesto u Evropi. U tabeli 6. dati su kritični faktori uspeha koje je menadžment odabrao i njihove ocene i težine, i to za dva grada: Pariz u Francuskoj i Kopenhagen u Nemačkoj.

Kritični faktori uspeha	Težina	Ocena na skali do 100		Rezultati	
		Francuska	Nemačka	Francuska	Nemačka
Raspoloživost radne snage i stavovi	0.25	70	60	$(.25)(70)=17.5$	$(.25)(60)=15.0$
Odnos ljudi prema vozilima	0.05	50	60	$(.05)(60)=2.5$	$(.05)(60)=3.0$
Prihod	0.10	85	80	$(.10)(85)=8.5$	$(.10)(80)=8.0$
Poreska struktura	0.39	75	70	$(.39)(75)=29.3$	$(.39)(70)=27.3$
Životni standard	0.21	60	70	$(.21)(60)=12.6$	$(.21)(70)=14.7$
Ukupno	1.00			70.4	68.0

Tabela 6. Ocena lokacija u Nemačkoj i Francuskoj

U ovom primeru izabrana je skala od 100 poena. Za skalu od 100 poena, prednost za lokaciju ima Francuska. Promenom težina za one faktore za koje postoji sumnja, može se analizirati osetljivost odluke. Na primer, za prvi faktor promena za 10 poena promenila bi rezultat.

Prednosti metode ponderacije su sledeće:

- to je najrasprostranjenija metoda koja se koristi u izboru lokacije;
- laka je za primenu;
- koristi se za izbor lokacije i proizvodnih i uslužnih objekata;
- uzima u obzir sve faktore koji su značajni za izbor;
- dodeljuje težine uticajnim faktorima.

Nedostaci ove metode su:

- uzima u obzir važne aspekte lokacije, ali ne i daljinu;
- subjektivnost stručnjaka u izboru faktora i određivanju njihove značajnosti.

1.5.1.3 Metod transportnih troškova

Ovaj metod se primenjuje u slučajevima kada su transportni troškovi visoki i igraju ključnu ulogu u izboru lokacije (visoki troškovi transporta sirovina, gotovih proizvoda). Za svaku alternativnu lokaciju su potrebni sledeći podaci:

- količina materijala koja se transportuje;
- transportni troškovi po jedinici puta;
- udaljenost između početke tačke i alternativne lokacije. [77]

Najpogodnija je ona lokacija koja ima najmanje transportne troškove. Ukoliko se dobije veći broj lokacija sa istim troškovima, nakon toga se mogu primeniti metoda bodovnog ocenjivanja ili metod ponderacije.

Proračun troškova se vrši sledećom formulom:

$$C_{tr,i} = \sum_{j=1}^m m_{ij} \cdot s_{ij} \cdot c_{ij} \dots\dots\dots(126)$$

$C_{tr,i}$ - ukupni transportni troškovi za pojedinu lokaciju, $n.j.$

m_{ij} - količina transporta između dobavljača/kupca j i lokacije i , t ,

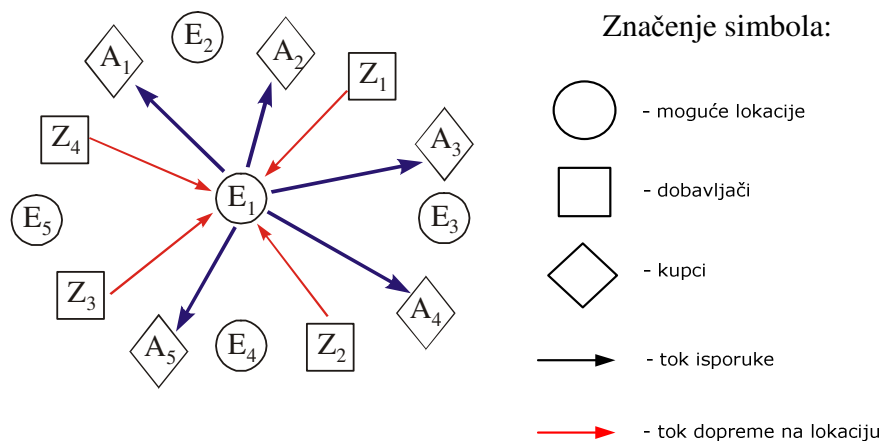
s_{ij} - udaljenost između dobavljača/kupca j i lokacije i , km

c_{ij} - transportni troškovi između dobavljača/kupca j i lokacije i , $n.j./t \cdot km$

$n.j.$ - novčane jedinice.

Za određivanje najpogodnije lokacije razvijeno je više metoda, od kojih su najpoznatije sledeće:

- *Launhardtova* grafička metoda (*Launhardt, 1982.*), koja koordinate lokacije određuje računajući ih analogno određivanju težišta površine;
- *Rockstrohova* metoda (*Rockstroh, 1969.*) definiše optimalnu lokaciju određujući koordinate vrha radijus vektora težišta (pojedini radijus vektori predstavljaju proizvod transportnog intenziteta i koordinata udaljenosti);



Slika 40. Određivanje najpogodnije lokacije s obzirom na transportne troškove [77]

1.5.1.4 Metoda investicionih ulaganja

Kada se bira lokacija, najčešće se radi o položaju koji zahteva izgradnju novog objekta sa kapacitetima koji odgovaraju preduzeću. U tom slučaju, radi se o značajnim ulaganjima i investitoru je važno da povрати uložena sredstva i ostvari maksimalni profit. Zato se primenjuje metoda investicionih ulaganja, po kojoj se izračunava rentabilnost alternativne lokacije na osnovu troškova proizvodnje, prihoda i proizvodnog kapitala.

Rentabilnost se izračunava na sledeći način:

$$R_{VK} = \frac{U_P - C_{UK}}{V_K \cdot \eta_{VK}} \cdot 100 \dots\dots\dots (127)$$

R_{VK} - rentabilnost vlastitog kapitala, %

U_P - ukupni prihod, n.j.

C_{UK} - ukupni troškovi, n.j.

V_K - vlastiti kapital, n.j.

η_{VK} - stopa vlastitog kapitala.

Najpogodnija je ona lokacija koja ima veću rentabilnost. Nedostatak ove metode je što zahteva mnogo vremena za prikupljanje podataka i ne uzima u obzir klasične faktore za izbor lokacije. Taj nedostatak se može nadomestiti kombinovanjem metode investicionih ulaganja sa prethodno opisanim metodama.

1.5.1.5 Metod mreže (centra gravitacije)

Metod mreže (centra gravitacije) je matematička tehnika koja se koristi za pronalaženje lokacije distribucionog centra koja će minimizirati troškove distribucije. Metod uzima u obzir lokaciju tržišta, obim dobara koji se isporučuju na tom tržištu, i troškove isporuke, kako bi se pronašla najbolja lokacija za distributivni centar. Zato je ova metoda značajna za logistiku preduzeća (transport, skladištenje). Pretpostavka je da troškovi transporta ne zavise od obima, a cilj su minimalni troškovi.

Prvi korak je pronalaženje lokacije u koordinatnom sistemu. Koordinatni sistem (mreža) i skala su proizvoljni, u zavisnosti od relativnih daljina koje se moraju prikazati. To se olakšava postavljanjem mreže na mapu regiona. Najčešće se za koordinate uzimaju geografska širina i dužina položaja. Centar se određuje jednačinama:

$$x - \text{koordinata centra gravitacije} = \frac{\sum_i d_{ix} Q_i}{\sum_i Q_i} \dots\dots\dots(128)$$

$$y - \text{koordinata centra gravitacije} = \frac{\sum_i d_{iy} Q_i}{\sum_i Q_i} \dots\dots\dots(129)$$

gde je:

d_{ix} - x – koordinata lokacije i

d_{iy} - y – koordinata lokacije i

Q_i - količina dobara koje se prenose sa ili na lokaciju i

S obzirom da broj kontejnera (obim) koji se isporučuju svakog meseca utiču na troškove, ne bi trebalo uzimati samo daljinu kao jedini kriterijum. Metod mreže pretpostavlja da su troškovi direktno proporcionalni daljini i obimu koji se isporučuje. Idealna lokacija je ona koja minimizira daljinu između skladišta i maloprodajnih objekata, gde se za daljinu određuju težine prema broju kontejnera (obimu) koji se koriste.

Metod mreže spada u grupu metoda individualnih lokacija, jer se ona primenjuje u slučajevima kada se bira lokacija jednog objekta odnosno skladišta ili distributivnog centra. Takođe, spada u grupu metoda izbora optimalnih lokacija, jer je funkcija cilja minimizacija transportnih troškova, a rešenje se ne traži među postojećim objektima, već se dobija optimalna nova lokacija.

Na sledećem primeru je prikazana primena navedene metode.

Fabrika Quain Discount imala je lanac od četiri velika prodajna objekta. Lokacije prodavnica bile su u Čikagu, Pitsburgu, Njujorku i Atlanti; oni su se snabdevali iz starog i neadekvatnog skladišta u Pitsburgu, gde je bila lokacija prve prodavnice. Podaci o potražnji svakog objekta su dati u tabeli 7.

Lokacija prodavnice	Broj isporučenih kontejnera mesečno
Čikago	2000
Pitsburg	1000
Njujork	1000
Atlanta	2000

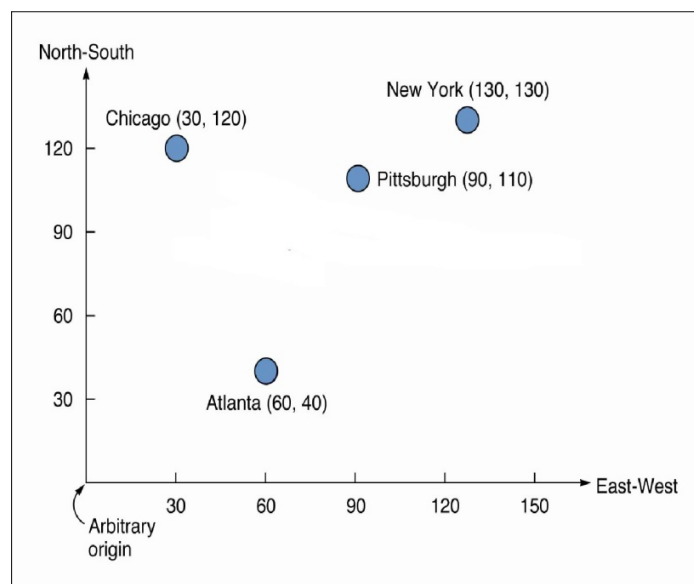
Tabela 7. Potražnja prodavnica Quain Discount

Firma je odlučila da pronade neku centralnu lokaciju, gde će izgraditi novo skladište. Postojeća lokacija skladišta je prikazana na slici 2. Na primer, za lokaciju 1 – Čikago dati su sledeći podaci koji se mogu videti iz tabele 8. i slike 41.:

$$d_{1x} = 30 \quad d_{1y} = 120 \quad Q_1 = 2000$$

PODACI			
	Kontejneri	X osa	Y osa
Chicago	2000	30	120
New York	1000	130	130
Pittsburgh	1000	90	110
Atlanta	2000	60	40
REZULTATI			
Suma	6000	310	400
Prosek		77,5	100
Koordinate centra		66,66667	93,33333

Tabela 8. Podaci o potražnji i koordinatama prodavnica



Slika 41. Koordinate prodavnica Quain Discount i postojećeg skladišta

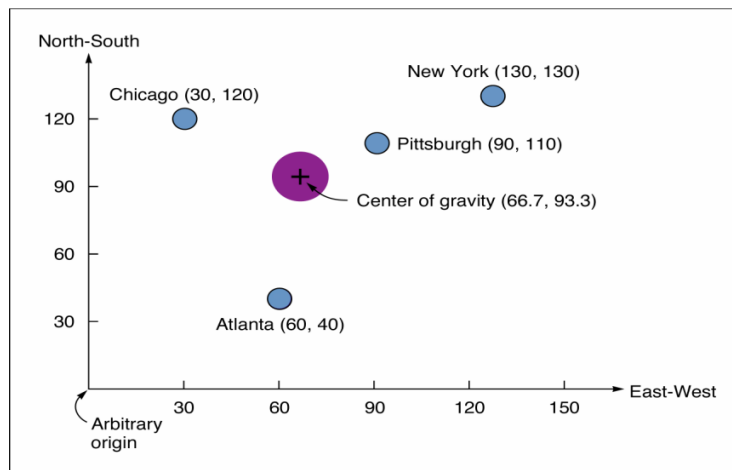
Koristeći podatke iz tabele i sa slike, dolazimo do sledećih formula:

x – koordinata centra gravitacije

$$= \frac{30 \cdot 2000 + 90 \cdot 1000 + 130 \cdot 1000 + 60 \cdot 2000}{2000 + 1000 + 1000 + 2000} = \frac{400000}{6000} = 66.7$$

y – koordinata centra gravitacije

$$= \frac{120 \cdot 2000 + 110 \cdot 1000 + 130 \cdot 1000 + 40 \cdot 2000}{2000 + 1000 + 1000 + 2000} = \frac{560000}{6000} = 93.3$$



Slika 42. Koordinate lokacije četiri prodavnice Quain Discount-a i Centar

Ova lokacija je prikazana na slici 42. Prenosjenjem ove mape na mapu U.S. ova lokacija bi bila blizu centra Ohaja. Firma može razmisliti i o Kolumbusu, Ohaju i obližnjim gradovima. [3]

Nedostaci metode mreže su sledeći:

- ukoliko postoje prepreke između lokacija (jezera, mora, planine) pa se rastojanje od centra gravitacije do postojećeg objekta ne može preći direktno, a pretpostavke su da je kretanje pravolinijsko;
- na postojećoj lokaciji može postojati prepreka;
- minimizira daljinu samo za jedan objekat;
- transportni troškovi su jedini faktor lokacije koji se uzima u obzir;
- teško rešava probleme u realnom svetu;
- ne može se uvek dobiti tačna pozicija lokacije.

1.5.1.6 Break-even analiza

Break-even analiza lokacije se koristi za poređenje troškova lokacije kako bi se izabrala ekonomičnija lokacija. Utvrđivanjem fiksnih i varijabilnih troškova i njihovim crtanjem na grafiku može se utvrditi koja lokacija ima najniže troškove. Ova analiza se može rešavati matematički i grafički. Grafički pristup ima prednost, jer se može videti koliko je jedna lokacija bolja od druge. *Break-even* analiza pripada grupi komparativnih analiza, jer se vrši analiza i izbor između više postojećih lokacija.

Ovaj metod ima tri koraka:

1. Utvrđivanje fiksnih i varijabilnih troškova za svaku lokaciju.
2. Nacrtati troškove za svaku lokaciju, pri čemu se na vertikalnoj osi prikazuju troškovi, a na horizontalnoj godišnji obim.
3. Izbor lokacije koja nosi najmanje troškove za očekivani obim.

Primer. Proizvođač auspuha za automobile je razmatrao tri lokacije – Jagodinu, Aleksinac i Niš – za novu fabriku. Analiza troškova pokazuje da su fiksni troškovi po godini i gradu 1.800.000,00

din, 3.600.000,00 din i 6.600.000,00 din respektivno; a varijabilni troškovi su 2000 po jedinici, 1000 i 500 din po jedinici respektivno. Očekivana prodajna cena auspuha je 6000 din. Kompanija želi da pronađe najekonomičniju lokaciju za očekivani obim od 4000 jedinica godišnje. Za svaku lokaciju mogu se iscertati fiksni troškovi i ukupni troškovi (fiksni+varijabilni) za očekivani obim.

PODACI			
	Jagodina	Aleksinac	Niš
Fiksni troškovi	1800000	3600000	6600000
Varijabilni troškovi	2000	1000	500
Obim (očekivani)	4000		
REZULTATI			
Prelomne tačke	Obim	Vrednost u dinarima	
Jagodina i Aleksinac	1800	7200000	
Jagodina i Niš	3200	12800000	
Aleksinac i Niš	6000	24000000	
Analiza obima za 4000 komada			
	Jagodina	Aleksinac	Niš
Ukupni troškovi	9800.000,00	7600.000,00	8600.000,00
Obim	Jagodina	Aleksinac	Niš
0	1800.000,00	3600.000,00	6600.000,00
4000	8000000	4000000	2000000

Tabela 9. Podaci o ukupnom obimu i troškovima i rezultati za tri lokacije: Akron, Bowling Green i Čikago

Ukupni troškovi za svaku lokaciju se dobijaju na sledeći način:

Za Jagodinu: Ukupni troškovi = 1800000din + 2000din x (4000) = 9800000din

Za Aleksinac: Ukupni troškovi = 3600000din + 1000din x (4000) = 7600000din

Za Niš: Ukupni troškovi = 6600000 + 500din x (4000) = 8600000din

Za očekivani obim od 4000 jedinica godišnje, Aleksinac ima najniže troškove lokacije. Očekivani profit je:

Ukupan prihod – Ukupni troškovi = 6000 x 4000 – 7600000 = 16.400.000,00 din godišnje

Potrebno je izračunati prelomne tačke za dalju analizu.

Prelomna tačka za Jagodinu i Aleksinac je:

$$1800000 + 2000X = 3600000 + 1000X$$

$$1000X = 1800000$$

$$X = 1800$$

Prelomna tačka za Aleksinac i Niš je:

$$3600000 + 1000X = 6600000 + 500X$$

$$500X = 3000000$$

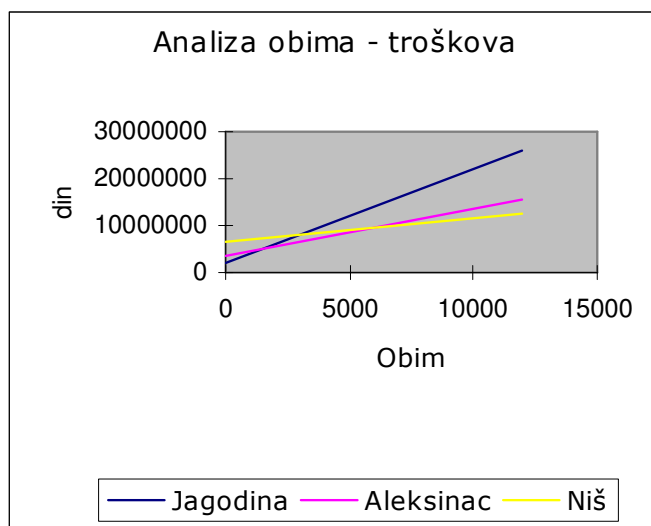
$$X = 6000$$

Prelomna tačka za Jagodinu i Niš je:

$$1800000 + 2000x = 6600000 + 500x$$

$$1500x = 4800000$$

$$x = 3200$$



Slika 43. Analiza obima-troškova za date lokacije

Za obim manji od 1800 jedinica Jagodina bi bila bolji izbor, a za obim veći od 6000 jedinica Niš bi ostvario najveći profit.

Nedostaci primene ove metode su:

- izbor lokacije se zasniva na obimu;
- obim proizvodnje je u retkim slučajevima stabilan;
- osetljiva na male promene u obimu, a lokacija se ne može često menjati.

1.5.1.7 Transportni metod

Cilj transportnog modela je da se odredi najbolja šema isporuke sa nekoliko skladišta (izvora) na nekoliko tačaka potražnje (destinacija) kako bi se minimizirali ukupni proizvodni i transportni troškovi. Svaka firma sa mrežom tačaka snabdevanja i potražnje se suočava sa takvim problemom. Transportni model postavlja početno rešenje, a zatim korak po korak prave se poboljšanja, dok se ne dođe do optimalnog rešenja.

Transportni metod se može koristiti samo u slučajevima kada je potrebno odrediti iz kog postojećeg skladišta treba vršiti transport do određenog potrošača. Spada u grupu individualnih komparativnih metoda, i ređe se koristi za izbor lokacije, jer se isključivo primenjuje u prethodno navedenom slučaju.

2. LAYOUT

Layout je fizička integracija faktora, koji prikazuju prostorne međuzavisnosti pojedinih komponenti, odnosno kako su se tehnologija i ljudi uklopili u sistem.

Cilj svakog tehnološkog procesa je da se razvije proizvodni sistem koji će da zadovolji zahteve kapaciteta i kvaliteta na najekonomičniji način. Jezgro proizvodnog sistema čine tehnologija i ljudi i predstavljaju osnovu za postavljanje proizvodnog procesa.

Dobar *layout* ima kao rezultat kvalitetan proizvod, dobar proces i očekivani nivo zahteva. Ulazni podaci *layout*-a su:

- prognoza (vreme i struktura zahteva),
- crteži (definišu sve fizičke i funkcionalne karakteristike proizvoda), radioničku dokumentaciju koja daje oblik, mere, tolerancije i površine koje se obrađuju,
- specifikacije proizvoda,
- operacione liste (definiše radne aktivnosti koje se izvode na svakom radnom mestu),
- karte toka (daju redosled kretanja proizvoda),
- opis poslova (specificira broj radnika na svakom radnom mestu),
- lokaciju pogona. "[63]

Sem navedenog, treba reći da raspored mašina i uređaja utiče na efikasnost rada, produktivnost, investicione i eksploatacione troškove. "Dobar *layout* obezbeđuje:

- efikasno iskorišćenje opreme i ljudskih resursa,
- visoki stepen iskorišćenja prostora,
- povoljno i efikasno kretanje materijala i ljudi kroz pojedine faze procesa,
- komfornu radnu sredinu,
- lak pristup opremi radi održavanja i popravki." [63]

Izabrani *layout* realizuje se kroz program, dok izmene utiču na veličinu troškova. "Loše projektovan *layout* je prisutan u proizvodnji i utiče na:

- stvaranje uskih grla (utiče na realizovanje obima proizvodnog programa),
- dužinu proizvodnog ciklusa,
- pojavu zastoja (mrtvi hodovi),
- kvalitet opsluživanja,
- zatrpanost radnih mesta, mašina i prolaza materijalom,
- stvaranje loših sigurnosnih uređaja,
- visinu troškova održavanja i dr." [63]

2.1 Pristup projektovanju

Projektovanje proizvodnog sistema se zasniva na nekoliko aktivnosti:

- proizvod ili materijal koji se proizvodi; podrazumeva se izrada elemenata, podsklopa ili sklopa, koji je najčešće oblikovan ili obrađen, montiran, deo iz kooperacije i gotov proizvod;
- količina (Q), odnosno obim proizvodnje koji se može proizvesti i iskazati u komadima, tonama, m², m ili upotrebljavati u posmatranoj proizvodnji.

Napred iskazano predstavlja osnovu za izradu tehnološkog projekta. Posle podataka o proizvodu i količini, izučiti se proizvodni proces sa svim tehnološkim operacijama, a koji se iskazuje kroz sledeću dokumentaciju:

- tehnološke karte,
- operacione liste,
- dijagram procesa izrade.

Kada se utvrde tehnološke operacije, definišu se mašine na kojima se obavlja obrada i dolazi se do podataka tehnološkog procesa. Više procesa čini proizvodni proces, gde se definiše kompletna proizvodna oprema. Proizvodni proces se obavlja uz prateće službe i odeljenja, da bi se isti realizovao. Tu se podrazumevaju uređaji koji opslužuju proizvodnju tj. stvaraju uslove rada. Konačno rešenje *layout*-a je vreme i povezuje napred navedene aktivnosti.

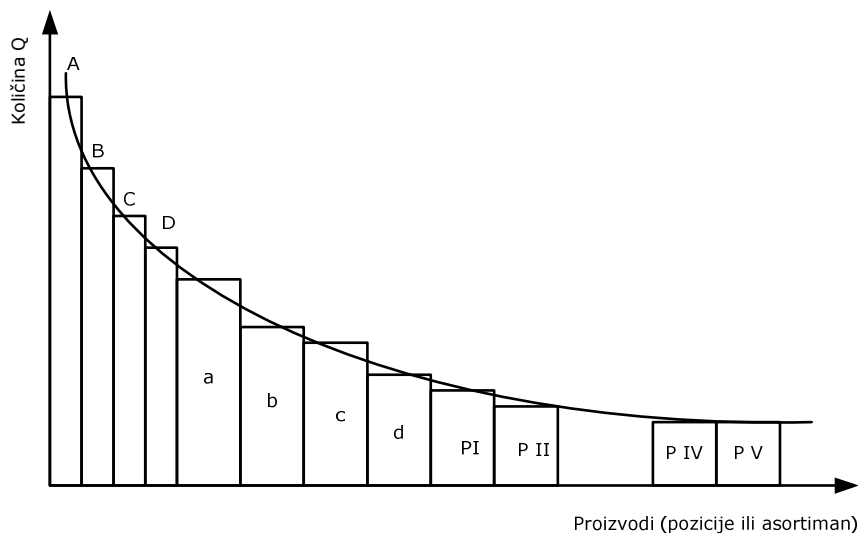
Pre nego što počne izgradnja objekata sačinu se svi potrebni projekti i sačinu se projekat realizacije gradnje, gde se navode sve aktivnosti sa međusobnim povezivanjem, trajanje aktivnosti, početak gradnje, obezbedi se infrastruktura i dopremi oprema koja se postavi i počinje gradnja. Zatim se tokom realizacije projekta prate se troškovi, rok završetka i vrši predaja proizvodnog sistema u eksploataciji.

2.2 Analiza proizvodnje (P) i količine (Q)

Izbor tehnološkog procesa se vrši kroz analizu proizvoda i količine proizvodnje. Osnovni podaci se dobijaju iz programa proizvodnje.

Kroz pomenutu analizu (P)-(Q) vidi se tip proizvodnje i tada se odlučuje gde će proizvodnja da se realizuje, kakav će biti unutrašnji transport, kao i proces skladištenja.

Na slici 74. je dat P-Q dijagram, gde se vrši analiza proizvoda i količina proizvedenih podsklopova, sklopova i proizvoda.



Slika 74. Analiza P-Q

dijagrama

U prvom delu analize se grupišu podsklopovi, sklopovi i proizvodi (prema konstruktivnim, gabaritnim, masenim i tehnološkim karakteristikama).

U drugom delu se izračunavaju količine za svaku grupu podsklopova, sklopova i proizvoda.

Jedinice mere zavise od prirode proizvoda ili pozicije koje su obuhvaćene analizom.

Sa leve strane je mali broj podsklopova i sklopova, koji se proizvode u većim količinama. Ovde su zastupljene visokoproduktivne mašine, kontinualan transport, visok stepen mehanizacije i automatizacije proizvodnog procesa i sistema kretanja materijala kroz proces. Ako će se proizvodni program raditi u dužem vremenskom periodu, onda treba nabaviti specijalizovanu opremu.

Na desnoj strani krive je mali broj različitih proizvoda, koji se proizvode u maloj količini. Tada se organizuje maloserijska ili pojedinačna proizvodnja, odnosno radionička proizvodnja. Oprema je univerzalna i može se primeniti u fleksibilnoj proizvodnji.

Postoje ograničenja P-Q dijagrama, kada su proizvodi ili procesi potpuno različiti. Tada se podela radionica bazira na jednom od faktora:

- prirodi proizvoda,
- materijalu,
- postupku obrade (tehnološke karakteristike, redosled operacija),
- zahtevanom kvalitetu,
- opremi (kod rekonstrukcije postojećih pogona),
- vrsti zgrade,
- opasnosti za zaposlene u procesu,
- organizacionoj strukturi,
- vrsti energije koja se koristi u procesu,
- vrednosti pojedinih elemenata, zbog rizika od gubitka i krađe i dr. [63]

Analizirajući različite faktore, obrazuje se grupa istih i sličnih elemenata, podsklopova, sklopova, a zatim se vrši analiza svake grupe ponaosob. Ako se izvrši unifikacija i standardizacija većeg broja elemenata, povećava se obim proizvodnje, a smanjuje asortiman proizvodnog programa.

2.3 Formiranje *layout*-a

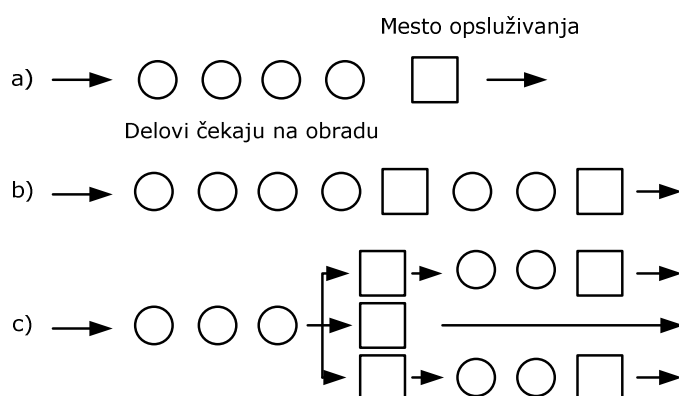
Osnovu za projektovanje dispozicije opreme (formiranje *layout*-a), predstavlja tok tehnološkog procesa – kod projektovanja radionica ili funkcija objekta – kod projektovanja skladišta. Kod proizvodnih radionica, raspored radnih mesta i raspored opreme može da se formira:

- prema procesu koji se odvija u pojedinim funkcionalnim celinama (grupisanje mašine prema vrsti poslova) tzv. prekidni sistemi,
- prema proizvodu (kada raspored sledi zahteve određenih proizvoda) odnosno prema redosledu izvođenja tehnoloških operacija (grupisanje mašine prema redosledu poslova) tzv. kontinualni sistemi,

- kombinovanjem prethodna dva načina (proizvodnja u ćelijama ili grupna montaža, odnosno stvaranje grupnih autonomnih radnih jedinica, fleksibilna proizvodnja),
- sa fiksnim pozicijama proizvoda.

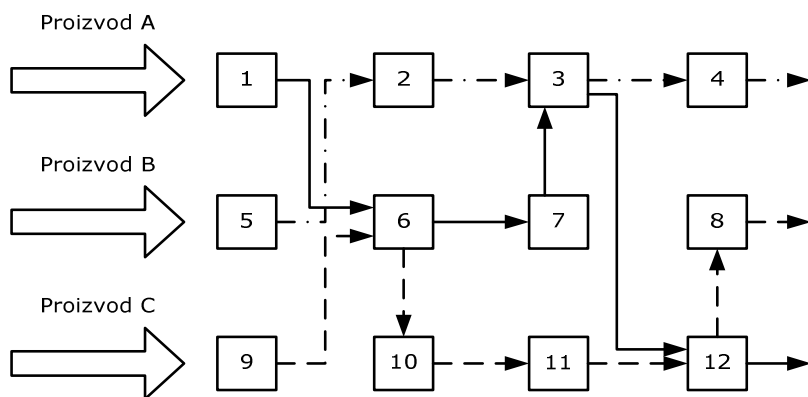
2.3.1 Prekidni sistemi

Raspored mašina i radnih mesta se vrši u pogonu gde se proizvodi i montira. Mašine, radna mesta i procesi se grupišu prema funkciji koju obavljaju. Svaki element od koga se sastoji podsklop i sklop se specifično obrađuje i zavisi od vrste i obima poslova u sistemu, što se iskazuje kroz tehnološku listu. U kretanju materijala koji se obrađuje, može se desiti da isti čeka na obradu, što je prikazano na slici 75.



Slika 75. Izgled opsluživanja mašine ili radnih mesta kada elementi čekaju

Kada se posmatra prekidni sistem kao celina, može se zamisliti kao mreža sastavljena od različitih podsistema čekanja sa različitim putanjama kroz sistem koje zavise od date pozicije i zahtevanog postupka obrade, što je prikazano na slici 76.



Slika 76. Izgled različitih podsistema čekanja kod različitih vrsta obrade

Intencija prekidnih sistema je da materijali koji duže čekaju na obradu u zavisnosti od mašine budu jedna do druge, jer na taj način bi se smanjili troškovi. Ukupni troškovi kretanja materijala za dati *layout* mogu se odrediti sledećim obrascem:

$$T_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_c \cdot L_{ij} \cdot T_{ij} \text{ [din]} \dots \dots \dots (148)$$

$B_c [-]$ - broj ciklusa između lokacija i i j;

$t_{ij} [m]$ - rastojanje između lokacija;

$t_{ij} \left[\frac{\text{din}}{m} \right]$ - troškovi po jedinici puta i ciklusu između lokacija

$n [-]$ - broj lokacija

Smanjenje troškova se može ostvariti menjanjem položaja lokacije. Tako se postiže ušteda u unutrašnjem transportu.

“Osnovne karakteristike prekidnih sistema su:

- Pogodni su za male obime proizvodnje, kada proizvodni program sadrži široki asortiman proizvoda;
- Ekonomični su u slučajevima kada priroda sistema zahteva fleksibilnost (univerzalna proizvodnja i transportna oprema). Zahtevana fleksibilnost može da bude različita u:
 - obimu svake narudžbine,
 - promeni asortimana proizvoda,
 - zahtevima procesa za poziciju koja se izrađuje,
 - dizajnu proizvoda,
 - putevima kroz sistem i dr;
- Poslovi koji rezultiraju su šiti u obimu i zahtevaju širi spektar znanja (specijalizacija u okviru polja aktivnosti) zahtevaju se univerzalni radnici visokih kvalifikacija;
- Lakše se ostvaruje kriterijum zadovoljstva u radu, nego kada specijalizacija rezultiraju aktivnostima koje se stalno ponavljaju;
- Veliki obim transporta u proizvodnji;
- Dugo zadržavanje pozicija u procesu, velika količina nedovršene proizvodnje;
- Potrebna velika površina za međufazna skladišta;
- Relativno mala investiciona ulaganja.” [63]

2.3.2 Kontinualni sistemi

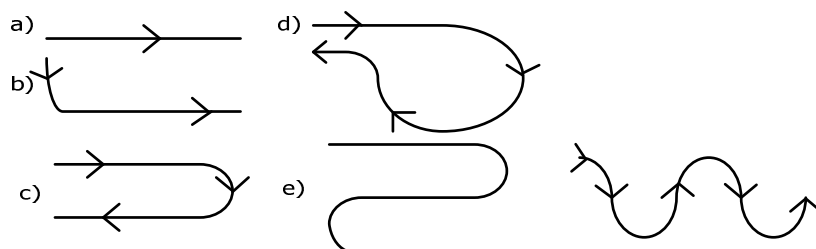
Proizvodna linija je uređeni niz radnih mesta po tehnološkom procesu, gde se radni predmet istom brzinom kreće, a rad se obavlja duž radne-proizvodne linije.

Duž linije su postavljene mašine sa opremom (linijski raspored), a primenjuje se u masovnoj i serijskoj proizvodnji. U serijskoj proizvodnji na liniji se obrađuje više različitih elemenata.

kod masovne proizvodnje na jednoj liniji (transfer linija) obrađuje se samo jedan element, određeni podsklop ili sklop. Kod montažnih radionica, duž linije montaže su elementi, podsklopovi i sklopovi i tako se montira proizvod.

Kod kontinuiranih sistema osnovni tokovi proizvodnje su fiksni i prate liniju koja može da bude različitog oblika:

prava linija (a), L linija (b), U linija (c), A linija (d) ili S linija (e), što je prikazano na sledećoj slici:



Slika 77. Osnovni oblici kontinuiranih sistema

Vreme takta projektovane linije se određuje prema uskom grlu, gde se posmatra minimizacija procentualno izgubljenog vremena:

$$I_{zt} = \frac{B_r T_c - \sum t_{ki}}{B_r T_c} \cdot 100 [\%] \dots \dots \dots (149)$$

$I_{zt} [-]$ - procentualno izgubljeno vreme;

B_t [takt] - broj taktova;

$T_c \left[\frac{\text{min}}{\text{takt}} \right]$ - vreme takta;

$\sum t_{ki} \left[\frac{\text{min}}{\text{takt}} \right]$ - suma najvećih vremena izvođenja pojedinih operacija (grupe operacija) u okviru takta

Navedeni obrazac daje stanje problema u najjednostavnijem obliku, te ne obuhvata razna ograničenja koji čine problem u praksi.

2.3.2.1 Uslovi

Da bi linijska proizvodnja mogla normalno da funkcioniše i da njeno korišćenje bude jednostavno i ekonomično, moraju se zadovoljiti određeni uslovi:

- proizvodni program se mora obavljati u dužem vremenskom periodu,
- obim proizvodnje mora da pokrije troškove postavljanja linije,
- ista vremena pojedinih taktova tehnoloških operacija,
- proizvodna linija mora da obezbedi kontinuitet procesa,
- jednostavnost konstrukcije proizvoda radi lakše montaže,
- konstruktivna i tehnološka dokumentacija mora da bude jednostavno i razumljivo urađena.

2.3.2.2 Postupak projektovanja

Pri projektovanju i izračunavanju ukupnog broja mašina na liniji mogu se pojaviti tri slučaja:

I Operacije na linijskoj proizvodnji su uravnotežene i uvek imaju istu veličinu, što se u praksi dosta teško postiže i velika je retkost, a to znači da je $t_{ki}=t_c$.

II Na liniji proizvodnje javlja se zastoj i elementi ne mogu da stignu da se obrade. Da bi se zastoj otklonio za datu operaciju povećava se broj mašina ili se zamenjuje mašina sa visokoproduktivnim mašinama, koje neće stvarati zastoj. Na tehnološkoj operaciji gde se javi zastoj naziva se "usko grlo" tehnološkog procesa proizvodnje ili proizvodne linije. "Usko grlo" se otklanja većim brojem mašina koje mogu da obrade svu količinu elemenata koji se nalaze u zastoj. Ako bi se matematički izrazili znači da je $t_{ki} > t_c$ odnosno da je vreme tehnološke operacije veće od vremena takta.

III Na liniji proizvodnje, date tehnološke operacije su vremenski kraće od vremena takta, što se matematički izražava $t_{ki} < t_c$. Ovde ne dolazi do zastoja, kao u slučaju II, ali je vreme takta dugačko, po postoje zastoji na proizvodnoj opremi, što govori da je stepen korišćenja opreme, odnosno mašina manji od uobičajenog.

"Uravnoteženje tehnoloških operacija na proizvodnoj liniji može se obaviti kroz:

1. Poboljšanje načina izvođenja operacija (primena odgovarajućih alata i pribora, promena tehnološkog postupka, repromaterijala itd);
2. Uvođenje paralelnog rada za izvođenje date operacije (usvajanje većeg broja mašina);
3. Postavljanje međufaznih skladišta. To znači da se označava mesto gde se skladišti materijal, radni predmet koji čeka na tehnološku operaciju ili neku drugu aktivnost. Međuoperacijska skladišta treba da obezbeđuju kontinuitet rada linije, tako da njihov kapacitet mora da bude zadovoljavajući da spreči zastoj. kapacitet svih skladišta je dat izrazom:

$$K_2 = Q_L \cdot T_2 = \frac{T_2}{T_c} [\text{kom}] \dots \dots \dots (150)$$

$Q_L \left[\frac{\text{kom}}{\text{čas}} \right]$ - obim proizvodne linije;

$T_2 [\text{čas}]$ - prosečno vreme zastoja;

$K_2 [\text{kom}]$ - broj komada date pozicije;

4. Produžavanje radnog vremena mašina i radnika kod izvođenja tehnoloških operacija koje su "usko grlo" bilo kroz prekovremeni rad ili višesmenski rad kao i kooperacije." [projfab]

2.3.2.3 Kretanje materijala

Da bi se proizvodna linija pustila u nesmetan rad, tj. njeno kretanje bilo kontinualno, neophodno je obezbediti potrebnu količinu materijala ili potrebnu količinu radnih predmeta. Kretanje predmeta može biti u grupi ili pojedinačno, što zavisi od sredstava koja se kreću. Veliki i gabaritni radni predmeti se kreću pojedinačno, dok mali težinski i malogabaritni predmeti se kreću grupno, a kapacitet prevoza zavisi od veličine i brzine sredstva prevoza. Kretanje materijala i radnih predmeta mora biti kontinualno, dok se prekidno koristi ako se radni predmeti rade u

kooperaciji. Materijal isto prekidno može koristiti, ako postoji veliko međuoperacijsko skladište. Uređaji za manipulaciju koriste se za transportovanje duž linije proizvodnje.

2.3.2.4 Ograničenje

Pri projektovanju proizvodne linije postoji niz ograničenja i najčešća su:

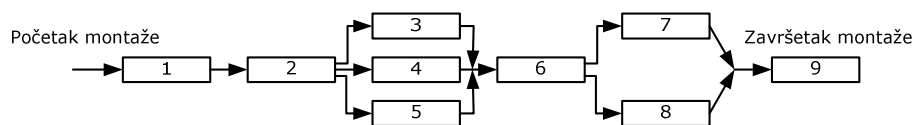
- nedovoljan ili nepovoljan proizvodni prostor,
- nemogućnost grupisanja tehnoloških operacija, koje otežava rešenje taktova,
- oblik i položaj radnih mesta su ograničeni na proizvodnog liniji,
- veliki asortiman proizvoda, tako da se menja proizvodna linija,
- nejednako vreme pojedinih operacija na montaži.

Ukoliko je proizvodna linija nepouzdana, onda ne funkcioniše efikasno. To se može uočiti kada se dobro analizira tehnološki tok proizvodnje za jedan ili više proizvoda.

2.3.3 Kombinovani sistemi

Kombinovanjem prethodna dva sistema, prekidnog i kontinualnog, dolazi se do savremenog koncepta proizvodnje. To se pre svega odnosi na "grupnu tehnologiju", stvaranje fleksibilne proizvodnje, odnosno do sklapanja proizvoda grupne montaže. Postoji analogija između proizvodnje po principu grupne tehnologije, fleksibilne proizvodnje i grupne montaže, te će se u daljem tekstu tretirati grupna i tipska tehnologija.

Kod grupne montaže postoje autonomne radne grupe specijalizovane po pojedinim granama poslova. Radnici mogu u okviru grupe da se menjaju na izvršavanju zadataka. Transportni uređaj prati liniju kretanja proizvodnje i dostavlja na montažu. Glavne karakteristike ovakve montaže su: visoki stepen fleksibilnosti, lakši radni uslovi, dovoljna varijacija takta proizvodnje u širokim granicama, niski troškovi transporta, nema ukrštanja transportnih puteva, međufazna skladišta su fleksibilna, olakšano upravljanje proizvodnjom, transportna sredstva prave manju buku od konvejera, poremećaji u radu retko utiču na zaustavljanje celog sistema. Na slici 78. je prikazana linija grupne montaže proizvoda.



Slika 78. Izgled linije grupne montaže

Zbog izuzetnog značaja, posebno se posmatraju fleksibilni proizvodni sistemi. Ovi sistemi moraju da zadovolje potrebe kupaca, koji su probirljivi, nezadovoljni željni novih, kvalitetnih i jeftinih proizvoda. Kod ove proizvodnje postoji integracija informacija i tokova kretanja materijala (radnih predmeta) kroz kompletan tehnološki odnosno proizvodni sistem, a to predstavlja osnovu CIM koncepta.

Savremen fleksibilna proizvodnja se definiše na sledeći način: "Fleksibilni proizvodni sistem je jedan integralni računarski upravljani kompleks numerički upravljanih alatnih mašina sa

automatskom manipulacijom materijala i alata i uređajima za automatsko merenje i testiranje, koji sa minimumom manuelne intervencije i kratkim vremenom promene alata (serije) može da se izrađuje na koji proizvod iz date familije proizvoda, a u okviru svojih mogućnosti i prema prethodnom planu.” [63]

Fleksibilni proizvodni sistemi mogu biti različiti, u zavisnosti od zahtevanog tehnološkog procesa i mašina koje poseduje, te možemo imati sledeće:

1. Fleksibilna proizvodna jedinica se sastoji od jedne mašine – najčešće obradni centar (obrađuje istovremeno radni predmet u tri ravni) sa više paleta koje automatski zamenjuju uz pomoć uređaja ili robota i jednim uređajem za izmenu alata.
2. Ova proizvodnja ima više mašina alatki i jedan obradni centar, skladištenjem sa više paleta koje se automatski menjaju kod svake mašine, ako i njihovi alati, a koje su računarski upravljane.
3. Postoje sistemi sa više mašina povezanih automatskim transportnim sistemom koji manipuliše i između skladišta elemenata i alata sa mašinama, a upravljanje se vrši računarom koji je povezan sa centrom upravljanja proizvodnjom.

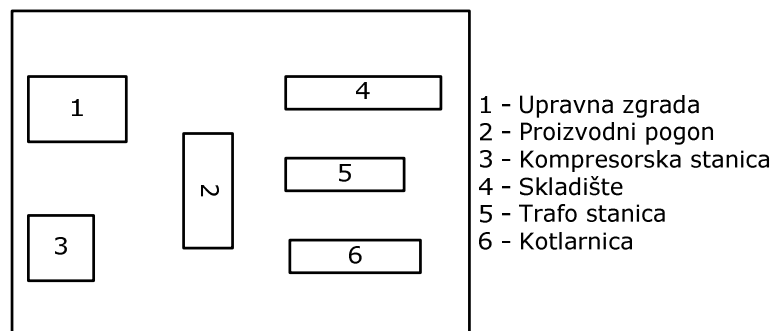
Treba napomenuti da je fleksibilnu proizvodnju neophodno pomagati automatizovanim transportnom, koji svojom mobilnošću skraćuje vreme trajanja tehnološkog procesa. Ta automatizacija između proizvodnih ćelija doprinosi da se brže obavi tehnološki proces, a to znači da se ubrzano rade različite male serije proizvoda.

3. POZICIONIRANJE OPREME I PROSTORA

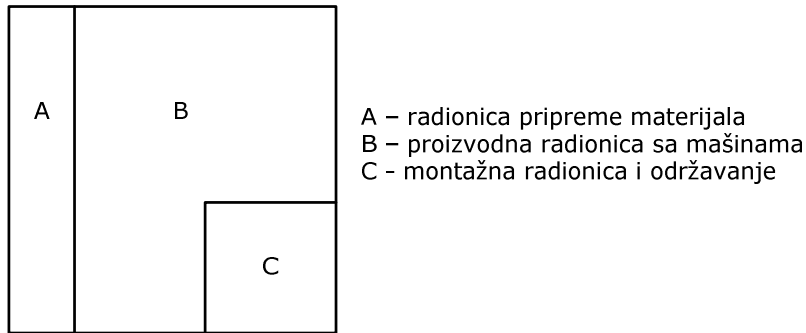
Današnji projektanti uvek teže da projektuju proizvodni sistem koji će imati geografski pozicioniran prostor, gde će sve biti automatizovano i mehanizovano. Posebno se daje naglasak na proizvodni transport kojim se želi postići optimalno rešenje međuoperacijskog transporta čime se znatno snižava cena proizvodnje. Da bi se to postiglo, neophodno je rešenje takvog rasporeda mašina tj. opreme da vrednost unutrašnjeg transporta bude minimalna. “Struktura proizvodnog sistema se rešava u sledeće tri faze:

- raspored objekata u okviru situacionog plana (I faza),
- raspored radionica i odeljenja unutar jednog objekta (II faza),
- raspored mašina, odnosno radnih mesta u okviru jednog pogona (III faza).” [63]

Na slici 79. je prikazan situacioni plan kompletnog proizvodnog sistema.

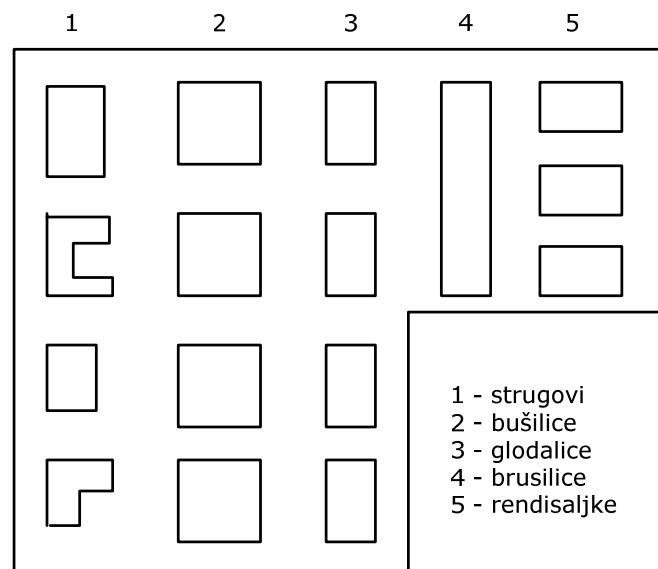


Slika 79. Situacioni plan proizvodnog sistema



Slika 80. Raspored proizvodnih prostorija

Na slici 80. je prikazan raspored proizvodnih prostorija, od pripreme materijala preko proizvodne radionice do montažne radionice, gde se formira proizvod. Na slici 81. dat je raspored mašina u proizvodnoj radionici, gde su pojedine mašine uzdužno poredane, počev od strugova (1) do rendisaljke (5).



Slika 81. Raspored mašina u proizvodnoj radionici

Raspored opreme i prostora u proizvodnom pogonu mora da zadovolji sledeće:

- ostvariti minimalne troškove unutrašnjeg transporta, što se postiže preko broja transportnog ciklusa, pređenog puta, transportnog učinka i učešća ručnog manipulisanja;
- minimizacija povratnih trasa i izbegavanje ukrštanja transportnih puteva;
- minimalni eksploatacioni troškovi, kroz optimalno rešenje rasporeda mašina i opreme;
- da se omogući fleksibilna proizvodnja;
- minimalan tip uređaja unutrašnjeg transporta;
- obezbeđenje radnih uslova, sigurnost i udobnost zaposlenih;

- da se omogući proširenje proizvodnog procesa;
- nesmetano upravljanje proizvodnjom.

Često postoje određena ograničenja koja utiču na donošenje kvalitetnog rešenja projekta, od kojih će se navesti samo neka:

- postojeći prostor je neadekvatan, što se ogleda u raznim činiocima,
- troškovi preuređenja postojećih objekata,
- vibracije i potresi,
- nivo buke,
- održavanje opreme nije adekvatno i stručno,
- neodgovarajući način transporta i dr.

3.1 Formiranje prostorne strukture

Pri formiranju prostorne strukture postoji veliki broj alternativa, koje se mogu realizovati. Ako se posmatra problem, isti se može rešiti dvojako:

- prema intuiciji koju rešava grupa projekatanta, koja ima iskustva i pravi dispozicioni plan, koji se formira rasporedom maketa mašina. Svaka alternativa se kritikuje i brani, sve dok se ne dođe do rešenja na koje niko nema primedbe;
- prema pravilima rešenja, koji se rešava kroz model razmeštaja pomoću šema, karte toka materijala ili računskih postupaka. Ovakvo rešenje se može sresti u literaturi, ali treba obratiti pažnju na više faktora koji obezbeđuju ovakvo rešenje.

“A. Tehnički kriterijumi – intenzivnost toka materijala, dužine transportnog puta, transportni učinak, vreme potrebno za transport i itd.

B. Ekonomski kriterijumi – investicioni troškovi, eksploatacioni troškovi itd.

C. Kriterijumi uslovljeni sistemom – uslovi rada, vrsta energije, lični kontakt itd.” [63]

“Postupak razmeštanja pojedinih lokacija, može da se izvede na dva načina:

- kvantitativni, kada međusobni odnos pojedinih lokacija određuje tok tehnološkog procesa i količine materijala koje se kreću kroz proces,
- kvalitativni, kada se uključuju u razmatranje sve aktivnosti koje su značajne za odvijanje datog procesa, kao kretanje zaposlenih, lični kontakt, buka, zagađenost pojedinih procesa itd; ovaj način se koristi kada se transportuju male količine, odnosno kada protok materijala nema bitan uticaj na razmeštaj pojedinih lokacija.” [63]

3.2 Izračunavanje transportnog učinka

Da bi se izračunao transportni učinak, neophodno je znanje toka tehnološkog procesa i količine materijala koja se kreću kroz taj proces. Raspored lokacija opreme i prostora može se rešiti kroz transportni učinak koji je definisan obrascem:

$$\min F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot L_{ij} \text{ [t m]} \dots \dots \dots (151)$$

F [t m] - ukupni transportni učinak;

q_{i-j} [t, m³, N] - količina materijala koja se kreće od i do j lokacije;

L_{i-j} [m] - dužina transportnog puta od i-te do j-te lokacije;

Prostorna struktura proizvodnog objekta je značajan ekonomski kriterijum, a funkcija cilja može se iskazati kao trošak:

$$\min T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot L_{ij} \cdot C_{ij} \text{ [din]} \dots \dots \dots (152)$$

T [din] - ukupni troškovi transporta;

$C_{ij} \left[\frac{\text{din}}{\text{tm}} \right]$ - veličina jediničnih troškova transporta od i-te do j-te lokacije po dužnom metru puta;

Rastojanje između lokacija je pravolinijsko rastojanje između tačke A (x1,y1) i tačke B (x2,y2) i iznosi:

$$d(A,B) = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots \dots (153)$$

3.3 Metode za raspored opreme

Raspored lokacija daje rešenje rasporeda opreme, radnih mesta, prostora, da bi se postiglo minimalno kretanje materijala, transporta između pojedinih faza proizvodnje. Postoji nekoliko metoda koje će se prikazati za raspored opreme.

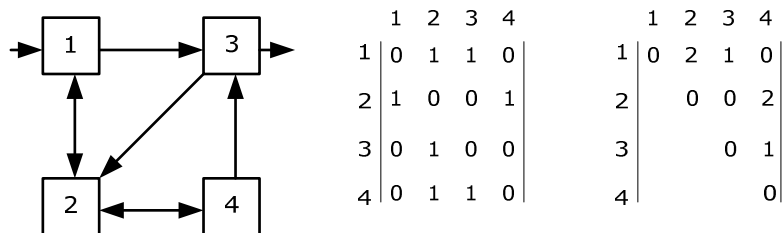
3.3.1 Metoda matrice od-do

Kod kvantitativnog pristupa razmeštaju lokacija radnih mesta i opreme može se prikazati kretanje materijala matricom od-do. Količina materijala koja se kreće može biti iskazana brojem komada, masom, brojem transportnih jedinica ili brojem transportnih ciklusa. Tu se vidi tehnološka povezanost pojedinih lokacija.

Orjentisana matrica je prikazana na narednoj slici pod a) čija je veza označena sa 1 i dvosmerna matrica označena na slici b).

a)

b)



Slika 82. Struktura šeme četiri mašine sa orjentisanom matricom [63]

Neorjentisana matrica može da prikaže i samo neke veze između lokacija, što se vidi na slici 83.

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2		0	1	1
3			0	1
4				0

Slika 83. Struktura šeme četiri mašine sa neorjentisanom matricom [63]

3.2.2 Metoda trougla

Raspored lokacija u ovoj metodi je određen položajem temenih tačaka jednakostraničnih trouglova zadate stranice S. Svaka lokacija je određena u temenu trougla. Postavljanje četvrte lokacije zavisi od intenziteta veze ostale tri lokacije. Funkcija cilja je data izrazom:

$$\min F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot L_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m \dots \dots \dots (154)$$

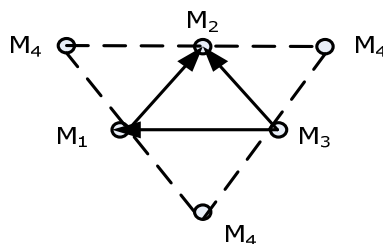
q_{ij} - intenzitet transportnog toka između i-te i j-te mašine;

L_{ij} - rastojanje između i-te i j-te lokacije;

Pri čemu se javlja ograničenje:

$$L_{ij} = K \cdot S, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m \quad K = 1, 2, 3, \dots, m$$

Primer je dat na slici 84:



Slika 84. Primer postavljanja četvrte lokacije [63]

1. Najpre se oformi matrica intenziteta veze od-do na osnovu kretanja između lokacija.
2. Na osnovu matrice od-do određuje se rang intenziteta.
3. Lokacije se razmeštaju na trouglastoj mreži i to se postavlja lokacija sa najvećim brojem veza, odnosno prva po rangui.
4. Razmeštaj lokacija može se koristiti kvadratnim rasterom.

3.3.3 Metoda krugova

Ova metoda je nastala na osnovu kritičkog prikaza metode trouglova. Kriterijum premeštanja opreme i radnih mesta uzima u obzir minimalni transportni učinak, odnosno minimum troškova kretanja, što je matematički prethodno prikazano. Rastojanje između lokacija je obrnuto proporcionalno jačini intenziteta transportne veze:

$$L_{ij} = \frac{1}{q_{ij}} \dots\dots\dots(155)$$

odnosno da se i-ta lokacija može postaviti ma gde na krugu. Da bi se dobio poluprečnik kruga, neophodno je da se radijus pomnoži sa odgovarajućim faktorom razmere ($R_{ij} = K/q_{i-j}$).

Rešenje se postiže na sledeći način:

1. Formira se neorijentisana matrica intenziteta zadatih transportnih tokova od-do.
2. Na osnovu prethodne matrice formira se matrica prečnika krugova (u mm). Svi se dobijaju množenjem faktora razmere K.
3. Iz matrice poluprečnika krugova nalazi se najmanja vrednost, koja se unosi na crtež i daje grafičko rešenje preseka tačaka. [63]

3.3.4 Programi

Kod manjih broja elemenata postoje računarski programi za razmeštaj opreme u proizvodnom sistemu. Poznati programi su Craft, Aldep i Corelap, COFAD/95, FLOT, LayOpt, Plant layout simulation, BlocPlan, WinSaba, FLAP itd.

Za razliku od CRAFT-a, COFAD/95 pored traženja najpovoljnijih lokacija opreme, menja i transportni sistem. Program daje raspored proizvodnog prostora i opreme i vrši izbor unutrašnjeg transporta koji će imati minimalne eksploatacione troškove. Polazni podaci su:

- usvojeni početni raspored opreme i naznačena ograničenja,
- lista mogućih puteva za svako kretanje između odeljenja,
- metod za procenu troškova pojedinih transportnih sistema.

COFAD traži optimalno rešenje menjajući lokacije pojedinih odeljenja, pri čemu se razmatraju transportni troškovi. Kada dođe do rešenja da transportni troškovi ne mogu da se smanje, onda se isto usvaja. Na taj način se daje dispoziciono rešenje uz pomoć računara sa naznakom odgovarajućeg transportnog sistema.

Alat za optimizaciju rasporeda u postrojenju - Facility layout optimization tool (FLOT) je interaktivni softver dizaniran da pomogne u oceni i projektovanju rasporeda. Sadrži dva programa. Prvi je alat za raspored objekta (FLAYOUT), koristi se za modeliranje fizičke strukture, unutrašnjih zidova, i pozicija radnih stanica na dvodimenzionalnom planu. Drugi program je alat za optimizaciju objekta (FOPT) ,koristi se da reši problem rasporeda radnih stanica u postrojenju na način koji minimizira troškove (npr. daljina, rukovanje materijalom).

LayOPT za Windows je softver za optimizaciju rasporeda postrojenja koji koriste planer i projektanti. Može se koristiti u proizvodnji, skladištenju, kancelarijama, i različitim uslužnim objektima. Postoje dva osnovna tipa algoritama koji se primenjuju u ovom softveru, i to: algoritmi poboljšanja i konstrukcije.

Algoritmi poboljšanja počinju sa postojećim rasporedom i datim tokom i troškovima i poboljšava se raspored promenom lokacija odeljenja.

Algoritmi konstrukcije su slični prethodnim, s tim što nema pretpostavki o početnom rasporedu. U stvari, algoritmi konstrukcije započinju sa praznim odeljenjem i prvo se postavljaju odeljenja na određene lokacije pre krajnjeg rasporeda.

LayOPT za Windows radi tako što se menja raspored dva susedna odeljenja koji vodi do najvećeg smanjenja funkcije cilja. Funkcija cilja je suma tokova pomnoženih sa troškovima i očekivanom daljinom između svih parova odeljenja. Raspored u ovom softveru se prikazuje u obliku matrice.

LayOPT omogućava:

- Kreiranje novog postrojenja
- Dodavanje novih proizvodnih linija
- Uklanjanje starih proizvodnih linija
- Implementaciju Just-In-Time (JIT) ili Business Process Re-engineering (BPR) principa
- Eliminisanje skladišta u proizvodnom odeljenju
- Implementiranje novog sistema rukovanja materijalom
- Prelazak sa tradicionalne na fleksibilnu proizvodnju.

Projektanti fabrika imaju dva izbora ili fizički da premeštaju opremu i mere rezultate postojećeg rasporeda ili da vrše simulaciju pre promena. Zato se simulacija najčešće koristi pri projektovanju rasporeda. Simulacija rasporeda fabrike (plant simulation layout) je alat koji koristi podatke da oceni postojeće stanje rasporeda i pokaže moguća poboljšanja. Isti podaci se koriste za objektivnu ocenu različitih alternativa, rekonstrukcije ili reorganizacije.

Korišćenje simulacije rasporeda fabrike omogućava:

- sistematski, troškovno efikasni način ocene alternativa rasporeda;
- objektivne podatke koji se koriste u odlučivanju pre skupih promena ili investiranja;
- maksimiziranje šanse uspešne implementacije uključujući osoblje u planiranje;
- izoštri veštine rešavanja timskog rešavanja problema i poboljša komunikaciju između menadžmenta i zaposlenih.

SABA (Stacking and Blocking Algorithm) je razvijen kao deo programa koji je primenjen u jednoj od prvih komercijalnih verzija proizvoda za upravljanje i planiranje objekata. Velike CAD korporacije su ugrađivale ovaj algoritam u svoje proizvode. Saba algoritam se primenjuje više od 15 godina, a 1993. je kreirana Windows aplikacija (WinSaba). Cilj primene ovog algoritma je da se napravi plan objekta koji zadovoljava potrebe prostora i zahteve svih entiteta ili funkcija u prostoru, dok istovremeno smanjuje troškove. Sistem može da se koristi za alokaciju prostora u novim objektima ili relokaciju u postojećim objektima. Koriste ga planeri/menadžeri objekata, arhitekte/dizajneri enterijera, konsultanti i planeri prostora. Tokom osnovne faze dizajniranja, WinSaba program koriste dizajneri i planeri prostora da testiraju alternativne konfiguracije objekata. Planer/menadžeri objekata koriste ovaj system da bi odgovorili na pitanja:

- Kako zaposleni treba da budu locirani u kancelariji, tako da se održava kontinuitet aktivnosti sa minimalnim kretanjem?
- Kako se neiskorišćenji prostor može srediti da se smanje troškovi najma?
- Koja će od predloženih alternative najviše odgovarati potrebama kompanije?

WinSaba daje automatizovana rešenja u kojima se od početka do kraja koristi Saba algoritam. Prethodno se mogu odrediti lokacije odeljenja ili grupe, koje se mogu menjati tokom procesa planiranja. WinSaba je jednostavan za upotrebu i sadrži AutoCad interfejs koji omogućava određivanje parametara objekata i kancelarija.

FLAP je program dizajniran za razumevanje i poređenje različitih, sofisticiranih heuristika problema rasporeda objekta (Facility Layout Problems - FLP). Ideja je da se smeste odeljenja fiksnih dimenzija u objektu fiksnih dimenzija. Postoje dva načina za to, ili da se održe njihova dužina i širina ili da se oni modifikuju, ali da njihova površina ostane ista. Korišćenjem animacije koju kontroliše korisnik, omogućava se vizuelizacija različitih FLP heuristika.

Alogoritam u FLAP je baziran na radu Simchi-Levija i Donaghey & Pire-a. Row-fit tehnika rasporeda je bazirana na "place and slide" algoritmu u Simchi-Leviovom "Facilities Layout and Planning" programu. Tehnika lanca je bazirana na ideji Donaghey & Pire-a "BLOCPLAN" programa. FLAP je dizajnirao i primenio Sidarth Khoshoo pod mentorstvom profesora Phil Kaminskog sa UC Berkeley Odseka za industrijsko inženjerstvo i operaciona istraživanja.

FLAP dakle koristi dve tehnike: row-fit i tehniku lanca.

Row - fit tehnika smešta odeljenja u red koji se "uklapa" u objekat. Odeljenja se smeštaju po listi odeljenja, sa leva na desno, dok više ne mogu da stanu u red. Algoritam održava dimenzije odeljenja, ali korisnik može da ih rotira.

Tehnika lanca postavlja odeljenja u krug ili red kao u prethodnoj tehnici. Dimenzije odeljenja se menjaju, ali površina svakog odeljenja ostaje ista. Ova heuristika kreira novi objekat čija je površina određena zbirom površina svih odeljenja.

Funkcija cilja određuje troškove rasporeda. Ukupni troškovi su jednostavni zbir tokova između dva odeljenja pomnoženi sa njihovom razdaljinom. Daljina može biti Euclidova ili pravolinijska.

Prednosti FLAP-a su jednostavnost korišćenja i mogućnost pomeranja odeljenja uz prikaz troškova rasporeda.

Raspored opreme i mašina je problem sa kojim se suočava svako proizvodno i uslužno preduzeće i zato se razvija veliki broj softverskih paketa koji rešavaju taj problem, a većina je nastala na

Univerzitetima u okviru Odseka za operacioni menadžment, industrijsko inženjerstvo ili operaciona istraživanja.

4. KRETANJE MATERIJALA

Transportni sistem kretanja materijala je sastavni deo proizvodnje. To znači da se ne može samostalno posmatrati, jer kao deo proizvodnje čini trošak, čija se veličina kreće od 10 do 70% celokupnih troškova proizvodnje. Troškovi mogu biti direktni i indirektni.

Direktni troškovi su stalni i tu spadaju: amortizacija, anuiteti i osiguranja; i promenljivi: električna energija i pogonsko gorivo, lični dohodak transportnih radnika, održavanje i režijski troškovi.

Indirektne troškove je teško identifikovati, jer znatno utiču na efekte poslovanja i obuhvataju:

- troškove izgubljenog vremena proizvodnih radnika zbog neblagovremene dopreme materijala,
- troškove nedovoljnog vremenskog iskorišćenja proizvodne opreme zbog zastoja u transportu,
- troškove nedovršene proizvodnje,
- troškove usled oštećenja u transportu,
- troškove usled smanjenog obima proizvodnje zbog loše rešenog *layout*-a,
- troškove penala zbog zakašnjenja,
- troškove prostora koji zauzimaju transportna sredstva (komunalije, naknada za korišćenje građevinskog zemljišta, grejanje, provetravanje, osvetljavanje i održavanje objekta),
- štete nastale usled nestručnog rukovanja transportnim sredstvima itd. [63]

Najznačajniji kriterijum je vreme protoka materijala kroz sistem. Na brzinu protoka materijala utiče izbor optimalnog rasporeda lokacija, racionalni raspored saobraćajnica i usmeravanje, kontrolisanje zastoja i bolja organizacija proizvodnje.

~Vreme protoka materijala (dužina stvarnog ciklusa proizvodnje) je dato izrazom:

$$T_{pm} = \sum t_o + \sum t_t + \sum t_w + \sum t_z [\text{čas}] \dots \dots \dots (156)$$

gde je:

$\sum t_o$ [čas] - ukupno vreme potrebno za izradu datog proizvoda;

$\sum t_t$ [čas] - ukupno vreme transporta;

$\sum t_w$ [čas] - ukupno vreme čekanja uslovljeno sistemom opsluživanja;

$\sum t_z$ [čas] - ukupno vreme zastoja uslovljeno organizacijom procesa;

Koeficijent protoka je dat izrazom:

$$p = \frac{T_{pm}}{\sum t_o} [-] \dots \dots \dots (157)$$

gde je:

$p [-]$ - koeficijent protoka;

$T_{pm} [\text{čas}]$ - vreme protoka materijala;

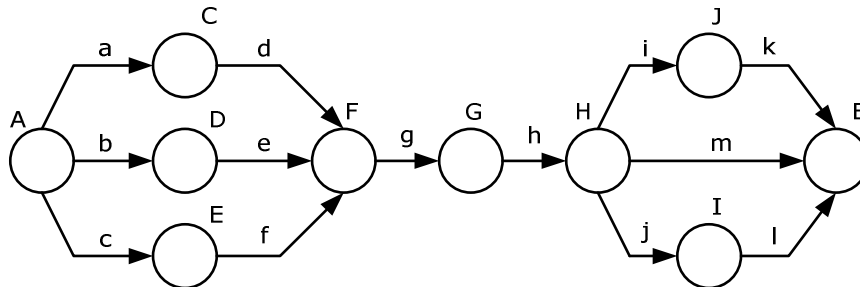
$\sum t_o [\text{čas}]$ - ukupno vreme potrebno za izradu datog proizvoda;

Koeficijent protoka (p) u metaloprerađivačkoj industriji se kreće u domaćim fabrikama od 2 do 10, a u pojedinim radionicama su izmerene znatno veće vrednosti od 40 do 50.~ [63]

U svakoj proizvodnji je najznačajnija aktivnost kretanje materijala tj. rešavanje transportnog sistema.

4.1 Problemi transporta

Transportni sistem razrešava probleme premeštanja tereta sa jedne na drugu lokaciju. Svaka grupa materijala sa kojom se manipuliše ima nekoliko transportnih tokova u zavisnosti od tehnološkog procesa proizvodnje. Transport materijala predstavlja kretanje materijala transportnim tokom. Ukupno kretanje materijala u svakoj proizvodnji predstavlja zbir tehnoloških tokova koji se podudaraju i razdvajaju, što se vidi na slici 85.



Slika 85. Tehnološki tokovi materijala

Materijal se kreće od tačke A do tačke B tehnološkim tokovima:

- A-a-C-d-F-g-G-h-H-i-J-k-B;
- A-a-C-d-F-g-G-h-H-m-B;
- A-a-C-d-F-g-G-h-H-j-I-l-B;
- A-b-D-e-F-g-G-h-H-i-J-k-B;
- A-b-D-e-F-g-G-h-H-m-B;
- A-b-D-e-F-g-G-h-H-j-I-l-B;
- A-c-E-f-F-g-G-h-H-i-J-k-B;
- A-c-E-f-F-g-G-h-H-m-B;

i) A-c-E-f-F-g-G-h-H-j-I-I-B;

Sa slike se vidi da ima devet tehnoloških tokova – puteva kuda se kreće materijal za tri spajanja – ulivanja i tri razdvajanja – izlivanja. Broj tokova se računa po obrascu:

$$B_{tt} = B_{tts} \cdot B_{ttr} [-] \dots \dots \dots (158)$$

- $B_{tt} [-]$ - broj tehnoloških tokova kretanja materijala;
- $B_{tts} [-]$ - broj sastavljenih (ulivnih) tehnoloških tokova kretanja materijala;
- $B_{ttr} [-]$ - broj rastavljenih (izlivnih) tehnoloških tokova kretanja materijala;

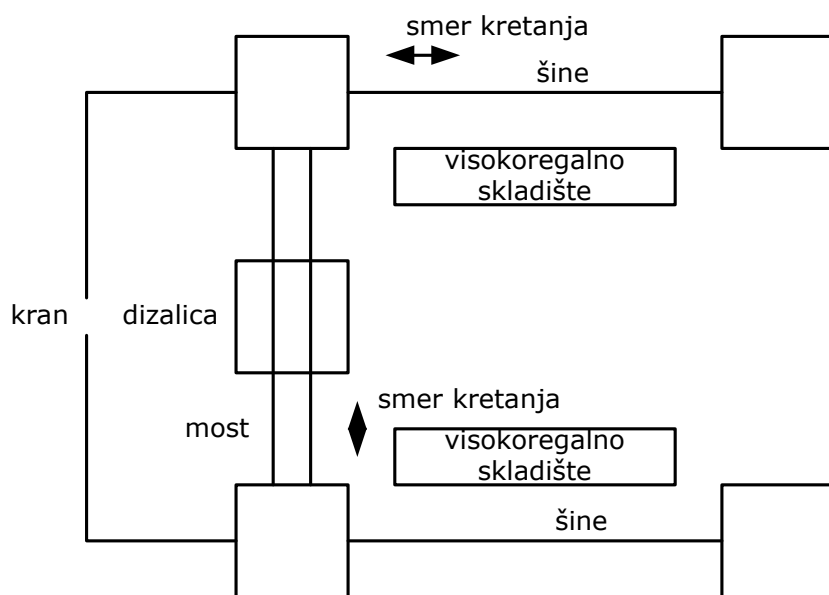
Iz ovoga sledi da svaki element, podsklop i sklop ima svoj tehnološki tok unutrašnjeg transporta, koji se sa ostalim tokovima spaja (uliva) i razdvaja (izliva).

Transportni sistem može da se sastoji iz jednog ili više različitih transportnih sredstava. Problemi se javljaju kada postoji više različitih transportnih sredstava. Prilikom projektovanja transportnog sistema moraju se uzeti u obzir vremenski resursi svakog tehnološkog toka, zatim vremenski gubici ako se materijal pretovara iz jednog transportnog sredstva u drugo.

Da bi se transportni sistem integrisao neophodno je sačiniti modelni proces. "Projektant mora da sagleda funkcionalnu interakciju između različitih komponenti sistema i osetljivost ma koje koncepcije na varijacije u formi pri sadržaju takvih interakcija." [63]

Savremeno projektovanje posmatra integraciju unutrašnjeg transporta i skladištenja, a specijalno je značajno kod automatizacije procesa uskladištenja. Kad postoji više transportnih sredstava koji rade najednom transportnom toku, onda isti čine transportni sistem.

Jedan od modela je uvođenje visokoregalne dizalice u proizvodnu radionicu. Dizalica iz visokoregalnog skladišta doprema materijal do radnog mesta, čime se postiže efikasniji rad i direktan transport, što se vidi na slici 86.



Slika 86. Direktan transport od skladišta do proizvodnje

Prednosti ovakvih rešenja su:

- eliminacija transporta između radnih mesta i skladišta,
- mala količina materijala za obradu, montaža na mestu upotrebe,
- efikasno rešenje kretanja materijala u proizvodnji,
- mogućnost povezivanja skladišta i fleksibilnog proizvodnog sistema,
- mogućnost korišćenja jedinstvenog skladišta za čuvanje repromaterijala, gotovih delova, gotovih proizvoda i za međufazna skladištenja u tekućoj proizvodnji,
- povećana produktivnost po jedinici površina zgrade,
- može da se postigne veoma kratak ciklus proizvodnje itd.~ [63]

4.1.1 Rešavanje problema kretanja materijala

Problemi kretanja materijala su dosta složeni za projektanta, kao i za celokupni proizvodni proces. Da bi se odgovorilo postavljenim problemima, neophodno je stručno i iskustveno znanje, kako bi se sagledali mnogi faktori.

Kretanje materijala mora da bude planirano i izvedeno po tačno definisanim tehnološkim tokovima. To kretanje mora da bude sagledano u okviru transportnog sistema, a planirano kao integralni deo definisanog sistema. Najbolje rešenje je da redosled tehnoloških operacija i proizvodna oprema imaju optimalno rešenje za kretanje materijala. Posmatrani proizvodni sistem mora biti fleksibilan, da bi se organizovala proizvodnja na osnovu zahteva tržišta.

Nepotrebna kretanja materijala treba svesti na minimum, a iskorišćenje proizvodnog prostora na maksimum. Sredstva mehanizovanog i automatizovanog transporta koristiti, kada je to praktično i ima ekonomske efekte. Pri projektovanju transportnih sredstava treba poboljšati radne uslove i obezbediti sigurnost u radu, a to se ogleda kroz standardizaciju i tipove transportnih sredstava i pomoćne opreme. Tu se pre svega misli na standardizaciju paleta, kontejnera, slaganja i pakovanja na paletu i dr. Da bi se to postiglo, neophodno je planirano održavanje transportnih sredstava, kao i opreme. Pri kretanju transportnih sredstava sa opremom, treba težiti smanjenju vremena utovara i istovara. Transportna sredstva i opremu koja je zastarela treba promeniti, kako bi se poboljšala efikasnost u radu. Efikasnost rada transportnog sistema se izražava kroz troškove po jedinici tereta koji se transportuje.

4.1.2 Karakteristike jediničnog tereta

Jedinični teret podrazumeva najpovoljniji oblik i veličinu transportne jedinice (TJ), koja omogućuje najefikasniji način prebacivanja materijala sa jedne na drugu definisanu poziciju, tj. sa jedne na drugu lokaciju. Transportna jedinica može sadržati: komadni teret, rasuti teret, tečnosti ili gas i dr. Put transportne jedinice mora da bude kvalitetan i ekonomičan. Prednosti korišćenja jediničnog tereta su:

- jedinstveni oblik tereta koji se transportuje,
- prenošenje velikih količina materijala u jednom velikom ciklusu transportovanja,

- bolje i jednostavnije opsluživanje,
- kraće vreme utovara i istovara,
- bolje iskorišćenje prostora (posebno u skladištima i uređajima spoljnog transporta),
- bolja zaštita tereta,
- sigurniji transport,
- jednostavnije slaganje tereta,
- jednostavnije uskladištenje,
- smanjenje transportnih troškova.

Nedostaci primene jediničnog tereta su:

- troškovi formiranja paletne jedinice (paletizacija),
- troškovi rasformiranja paletne jedinice (depaletizacija),
- zahtevana mehanizovana oprema za transport,
- neiskorišćeni prostor unutar jediničnog tereta (popunjenost palete, suda)
- masa transportne jedinice često utiče na povećanje nosivosti transportnog sredstva,
- problem vraćanja praznih transportnih jedinica (kontejnera).

Jedinični tereti koji se najviše koriste u industrijskom transportu su:

- razni oblici paleta, sudova,
- razni oblici kontejnera,
- buntovi, bale, rolne i dr. ~ [63]

4.1.2.1 Formiranje transportne jedinice

Posebna pažnja se posvećuje formiranju transportne jedinice, jer je jedinični teret jedan od glavnih faktora koji utiče na formiranje transportnog sistema. Pri izboru podsistema transporta, a to je paleta, treba znati svrhu primene. Svrha primene ogleda se u tome, da li paleta služi za transport, uskladištenje ili snabdevanje kupca.

Mora se znati masa, dimenzije, oblik i vrsta materijala, zbog gustine, ako i pakovanje pozicije elemenata podsklopa, sklopa ili proizvoda koji se transportuje na paleti i dostavlja kooperantu, kupcu ili kao poluproizvod montažeru gotovog proizvoda.

Poznavajući kompletan transportni sistem poznaje se kretanje materijala, kao i ograničenja sredstava koja se koriste. To se odnosi na konvejer, viljuškar ili neko drugo transportno sredstvo koje sa paletom čini kompatibilnost transportnog sistema.

Ukoliko transportno sredstvo služi za uskladištenje gotovog proizvoda ili materijala, onda se mora utvrditi da li je skladište regalno, prostorno i sve se skladišti po podu ili u obliku blokova i dr. Mora se znati da li je paleta standardna ili nestandardna zbog njenog slaganja po visini, kao i koliko se različitih paleta koristi u posmatranom transportnom sistemu. Takođe treba uzeti u

obzir i vozila spoljnog transporta i njegove karakteristike koje se odnose nosivost, dimenzije, otvoreno ili zatvoreno i dr.

Osim navedenog, moraju se poznavati karakteristike zgrade u kojoj se vrši doprema i otprema materijala, podsklopova, sklopova, gotovih proizvoda. To se odnosi na oblik zgrade, rastojanje između stubova, širinu transportnih hodnika, vrata, kvalitet i nosivost poda, karakteristike liftova, prijemno-otpremne rampe, vage za teret i dr.

4.1.2.2 Projektovanje sistema

Projektovanje sistema jediničnog tereta zavisi od mnogo faktora, čiji je uticaj različit. Prvo se definiše projektni zadatak koji daje osnovne podatke o količini materijala, lokacijska mesta sa karakteristikama prostora, kao i posedovanje finansijskih sredstava.

Prvo se razmatra i određuje ciklus transporta, koji zavisi od zahteva međuskladišta, uticaja puta, uticaja okoline, potrebne manipulacije, spajanje i razdvajanje puteva, ukrštanje i dr. Zadatak definiše i fizička ograničenja prostora koja se odnose na hodnike, vrata između njih, prijemno-otpremne rampe, visinu prostora, liftove, dimenzije skladišta, raspored proizvodne opreme i dr.

Da bi projektovali savremeni proizvodni sistem neophodno je znati nosivost vozila koja se kreću, nosivost poda, visine skladištenja, visinu objekta, itd.

Sem napred nabrojanog, postoje i ekonomska ograničenja koja se odnose na investicione troškove za transportnu opremu, nabavku paleta, kao i vreme i radna snaga potrebna za formiranje jediničnog tereta i njegova finansijska vrednost, kao i kompletni eksploatacioni troškovi.

Pri projektovanju transportnog sistema, neophodno je zadovoljiti većinu od nabrojanih kriterijuma za izbor transportne jedinice, a to se odnosi na: optimalan oblik i nosivost, univerzalnost primene, mehaničku čvrstoću, malu masu, lako punjenje i pražnjenje, mogućnost transporta standardnom opremom, laka identifikacija kod automatskih sistema, mogućnost slaganja jedne jedinice na drugu, mogućnost uskladištenja, dizajn, jednostavno održavanje, niska cena, niski troškovi paletizacije i depaletizacije.

4.1.2.3 Formiranje jediničnog tereta

Teško je formirati model slaganja jediničnog pakovanja na transportnu jedinicu. Najznačajniji uticaji su: tip i dimenzija palete; dimenzije, oblik, masa i posebni uslovi kao što je lomljivost, osetljivost i dr. kod jediničnog pakovanja; način slaganja može biti ručni, mehanizovani, automatski ili pomoću robota; transportni uređaji koji se koriste i metode transporta; oblik skladišta; dimenzije vozila spoljnog transporta; karakteristike kretanja; posebna želja korisnika; troškovi formiranja transportne jedinice kroz rad, materijal i opremu.

4.1.2.4 Stabilnost tereta na transportnoj jedinici

Stabilnost tereta na transportnoj jedinici zavisi od jediničnog pakovanja. Ukoliko je jedinično pakovanje pogodnog oblika, odgovarajućih dimenzija, mase i zadovoljavajućeg koeficijenta trenja, spakovani teret na paleti je stabilan i ne može doći do njegovog pomeranja. Ukoliko posmatrani jedinični teret nije stabilan, jer ne ispunjava napred nabrojane karakteristike, onda se koriste sledeća sredstva za pričvršćivanje tereta: trake, žica, plastična folija, samolepljiva folija i dr.

Karakteristika transportnih jedinica je da se jedinični tereti zahvataju pomoću viljuški ili platformi; podizanjem pomoću kuke ili užeta i pomoću specijalnih uređaja za zahvatanje.

4.1.3 Kapacitet transportnog sistema

Kapacitet transportnog sistema je definisan kao količina jediničnog ili rasutog tereta koji je dat kao broj komada ili zapremina, koji se prenosi transportnom jedinicom u jedinici vremena. Razlikuje se projektovani, tehnički i stvarni (radni) kapacitet. Projektovani, tehnički kapacitet je količina tereta koja se prenese u jedinici vremena pri normalno, prosečno napunjenim elementima proizvodnje sredstva ili uređaja koji nosi teret pri projektovanoj konstantnoj radnoj brzini. Projektovani kapacitet uređaja određen je parametrima uređaja i karakteristikom tereta koji se transportuje.

Stvarni (radni) kapacitet je određen eksploatacionim uslovima rada. Faktor gotovosti je dat sledećim jednačinom:

$$f_g = \frac{\sum T_f}{\sum T_f + \sum T_p} [-] \dots \dots \dots (159)$$

$f_g [-]$ - faktor gotovosti stvarnih radnih uslova;

$\sum T_f [\text{čas}]$ - ukupno vreme koje sistem provede u radu;

$\sum T_p [\text{čas}]$ - ukupno vreme otkaza sistema;

Odnos stvarnog i projektovanog kapaciteta iznosi:

$$\eta_u = \frac{Q_s}{Q} = \frac{V_s}{V} [-] \dots \dots \dots (160)$$

$\eta_u [-]$ - koeficijent iskorišćenja uređaja;

$Q_s \left[\frac{t}{h} \right]$ - stvarni ili radni kapacitet uređaja;

$Q \left[\frac{t}{h} \right]$ - projektovani kapacitet uređaja;

$V_s \left[\frac{m^3}{h} \right]$ - stvarni kapacitet uređaja;

$V \left[\frac{m}{h} \right]$ - kapacitet uređaja;

Koeficijent iskorišćenja uređaja može se izračunati na sledeći način:

$$\eta_u = f_q \cdot \eta_\psi \cdot \eta_q [-] \dots \dots \dots (161)$$

$f_q [-]$ - faktor gotovosti;

$\eta_\psi [-]$ - stepen iskorišćenja nosivosti elemenata koji nosi teret zavisi od specijalnih uslova eksploatacije, napajanja uređaja, vremenskih

uslova, vlage, temperature i kreće se u granicama 0,85-1;

$\eta_p [-]$ - stepen vremenskog iskorišćenja uređaja;

4.1.3.1 Kontinualni transport

Kod određivanja kapaciteta uređaja kontinualnog transporta razlikuje se sledeće:

- kontinualni transport rasutog tereta,
- prekidni transport rasutog tereta,
- kontinualni transport komadnog tereta,
- prekidni transport komadnog tereta.

Priliko izračunavanja uzimaju se u obzir prosečne količine tereta po jedinici dužine transporta i radna brzina transporta. Kapacitet protoka dat je obrascem:

$$Q = q_v \cdot \rho \cdot v = q_m \cdot v \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \dots\dots\dots(162)$$

$$Q \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \quad - \text{kapacitet protoka mase;}$$

$$q_v \left[\frac{\text{m}^3}{\text{m}} \right] \quad - \text{prosečna zapremina tereta po jedinici dužine;}$$

$$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad - \text{gustina rasutog tereta;}$$

$$v \left[\frac{\text{m}}{\text{h}} \right] \quad - \text{brzina transportovanja;}$$

$$V \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right] \quad - \text{prosečna zapremina po jedinici dužine;}$$

Ako rasuti teret ima poprečni presek A_o [m^2] sa koeficijentom popunjenosti preseka ψ [-], pri čemu je $\psi \leq 1$, pa je porečni presek materijala $A = A_o \cdot \psi$ [m^2].

Količine po dužnom metru je $q_m \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$ ili $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{m}} \right]$ je dat izrazima kapacitet protoka:

$$Q = A_o \cdot \psi \cdot \rho \cdot v \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \dots\dots\dots(163)$$

$$V = A_o \cdot \psi \cdot v \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right] \dots\dots\dots(164)$$

Ukoliko se rasuti teret transportuje u nosećim sudovima transportera (elevatora), onda je zapremina tereta u sudu:

$$V_s = V_o \cdot \psi \left[\text{m}^3 \right] \dots\dots\dots(165)$$

gde je:

$v_s [m^3]$ - zapremina tereta u sudu;

$S [m]$ - rastojanje između sudova;

Zapremina tereta po dužnom metru iznosi:

$$q_v = \frac{V_s}{S} = \frac{V_o \cdot \psi}{S} \left[\frac{m^3}{m} \right] \dots\dots\dots(166)$$

Kapacitet protoka iznosi:

$$Q = \frac{V_s}{S} \cdot \rho \cdot v = \frac{V_o \cdot \psi}{S} \cdot \rho \cdot v \left[\frac{kg}{h} \right] \dots\dots\dots(167)$$

$$V = \frac{V_s}{S} \cdot V = \frac{V_o \cdot \psi}{S} \cdot \rho \cdot v \left[\frac{m^3}{m} \right] \dots\dots\dots(168)$$

Kada se jedinični teret prosečne mase m prenosi pojedinačno ili u grupama od Z komada, sa rastojanjem između tereta S , masa tereta po jedinici dužine konvejera će biti:

$$q_m = \frac{m}{S} \text{ ili } q_m = \frac{m \cdot Z}{S} \dots\dots\dots(169)$$

Kapacitet protoka je dat izrazom:

$$Q = \frac{m}{S} \cdot v \cdot \psi \left[\frac{kg}{h} \right] \text{ ili } Q = \frac{m \cdot Z}{S} \cdot v \cdot \psi \left[\frac{kg}{h} \right] \dots\dots\dots(170)$$

Kod transportovanja jediničnog tereta se izračunava broj komada u jedinici vremena.

Prosečan interval vremena između komada je:

$$t = \frac{S}{v} [h] \dots\dots\dots(171)$$

Na osnovu ovog obrasca izračunava se kapacitet u komadima:

$$Z = \frac{v}{S} \psi \text{ ili } Z = \frac{Z \cdot v}{S} \psi \dots\dots\dots(172)$$

$Z \left[\frac{\text{kom}}{h} \right]$ - broj komada u jedinici vremena;

$v \left[\frac{m}{h} \right]$ - brzina transportovanja;

$z [kom]$ - broj komada;

$S [m]$ - rastojanje između sudova;

Pri izboru uređaja rasutog tereta kontinualnog transporta, određuju se noseći elementi tereta, odnosno određuju se geometrijski parametri nosećeg elementa tereta.” [63]

4.1.3.2 Prekidni transport

Tehnički kapacitet uređaja prekidnog transporta je dat izrazom:

$$Q = q_0 \cdot \psi \cdot N_c \dots\dots\dots(173)$$

$Q \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right]$ - kapacitet uređaja;

$q_0 [\text{kg}]$ - nominalna nosivost uređaja;

$\psi [-]$ - prosečni koeficijent iskorišćenja nosivosti;

$N_c \left[\frac{1}{\text{h}} \right]$ - broj radnih ciklusa uređaja;

Broj radnih ciklusa uređaja je:

$$N_c = \frac{1}{\sum t_i} \left[\frac{1}{\text{h}} \right] \dots\dots\dots(174)$$

gde je:

$\sum t_i [\text{h}]$ – zbir elementarnih vremena pojedinih zahvata i kretanja koje uređaj napravi u toku jednog ciklusa;

Uprošćeno izraz za N_c glasi:

$$N_c = \frac{1}{t_o + \frac{2L}{v}} \left[\frac{1}{\text{h}} \right] \dots\dots\dots(175)$$

gde je:

$N_c \left[\frac{1}{\text{h}} \right]$ - broj radnih ciklusa uređaja;

$t_o [\text{h}]$ - pomoćno vreme koje obuhvata zahvatanje tereta, puštanje, utovar ili istovar uređaja (vreme potrebno za pretovar);

$L [\text{m}]$ - dužina puta između tačaka prijema i otpreme tereta;

$v \left[\frac{\text{m}}{\text{h}} \right]$ - prosečna brzina kretanja uređaja (zavisi od uslova rada, kvaliteta puta, širine puta, ukrštanja transportnih puteva itd;

Stvarni kapacitet pretovara se izračunava na isti način, kao i kod uređaja prekidnog transporta. [63]

4.2 Analiza transporta

Tehnološki proces proizvodnje se sastoji iz mnogo operacija, koje su po redosledu poredane, po kojima se kreće materijal u zahtevanim količinama i ostvaruje predviđenu ili planiranu proizvodnju. Zadatak je da se posmatra materijal koji uzrokuje znatne troškove, na koje treba

uticati da se smanje. Nepotrebna kretanja materijala se ne smeju dozvoliti, a posebno između onih operacija koje nisu direktno vezane za izvođenje operacija procesa.

Pre početka analize pravilnog kretanja materijala za pojedine tehnološke operacije obrade, mora se postaviti problem. Kada su definisane sve tehnološke operacije, analiza se vrši na sledeći način:

1. *Eliminisanje* se zasniva na potrebi da su predviđene operacije ili aktivnosti neophodne ili se mogu izostaviti.
2. *Kombinovanje* podrazumeva udruživanje dve ili više operacija i aktivnosti ili se iste mogu obaviti na novopredloženi način.
3. *Promena redosleda* se zasniva na promeni poslova, mesta, uređaja ili čoveka koji je zadužen za izvođenje predviđene operacije.
4. *Poboljšanje* podrazumeva da se može unaprediti metod izvođenja operacija ili aktivnosti ili poboljšati oprema.

Zatim se na osnovu napred izvedene analize razrešava problem kretanja materijala, gde se definiše redosled kretanja, intenzitet i veličina kretanja. Treba prevideti i tok kretanja otpadnog materijala, koji može biti specifičan i mora se rešiti na drugi način u odnosu na osnovni materijal.

Detaljna analiza se sprovodi kada je materijal velike mase i gabarita, kada se prenose velike količine, ili kada su veliki troškovi manipulacije, pretovara i transporta. Često se dešava da obradni procenti imaju manje troškove od kretanja materijala, pa su i ekonomski efekti kretanja materijala najznačajniji. Zato je neophodno napraviti model za analizu kretanja materijala sa neophodnom dokumentacijom.

4.2.1 Model za analizu kretanja materijala

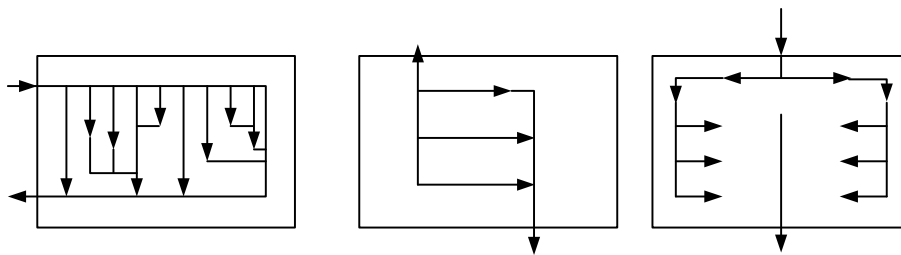
Ovaj model ima zadatak da analizira i definiše primenu u projektovanju. Dati su različiti primeri iz prakse koji se mogu koristiti i za druge projekte.

4.2.1.1 Šema kretanja materijala

Ova šema predstavlja grafički put i smer kretanja materijala kroz proizvodni proces. Materijal koji se koristi za proizvodnju naziva se reprodukcioni materijal, koji se u toku procesa, koji se naziva transformacija, oblikuje u element proizvoda. Više elemenata proizvoda sa gotovom robom čini podsklop, a više podsklopova sa gotovom robom čini sklop, više sklopova sa elementima iz kooperacije, vezivnom gotovom robom i drugim materijalima čini proizvod.

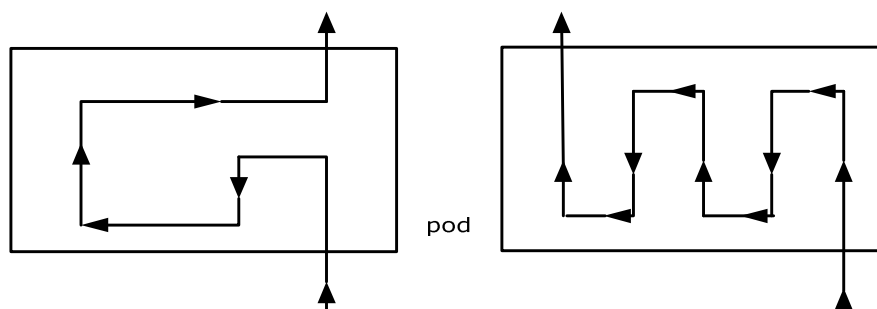
U zavisnosti od tehnološkog procesa formira se šema po horizontalnoj, vertikalnoj i profilnoj ravni kretanja materijala. Ova šema zavisi od saobraćajnica koje se nalaze između proizvodne opreme i od nje zavisi oblik, površina i spratnost proizvodnog sistema koji se projektuje.

Na slici 87. su date šeme kretanja materijala u horizontalnici:



Slika 87. Šema kretanja materijala u horizontalnici

Na slici 88. su date šeme kretanja materijala u vertikalnici:



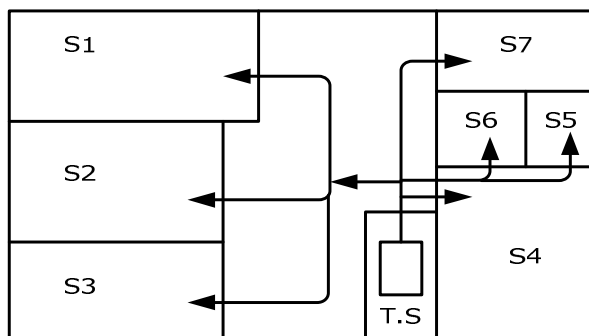
Slika 88. Šema kretanja materijala u vertikalnici

Šema kretanja materijala se može dati između proizvodnih objekata i skladišta ili unutar proizvodnog objekta, koja karakteriše raspored proizvodne opreme (mašina) i radnih mesta. Pri postavljanju šeme treba voditi računa o sledećem:

- da predstavlja najkraći put kretanja materijala,
- da ima zatvoren jednosmeran oblik kretanja pri čemu se izbegavaju ukrštanja i povratna kretanja;
- da omogućuje proširenje pogona bez ikakvog prekida i ukrštanja kretanja materijala.

4.2.1.2 Tok materijala

Dijagram toka materijala pokazuje kuda se kreće glavni tok sa smerom i intenzitetom. To omogućuje sagledavanje kretanja u pogonu, kao i otpadnih materijala, da bi se odredila dužina puteva, smer se prikazuje strelicom, i širina toka – puta, u zavisnosti od intenziteta. Na slici 89. je prikazan dijagram kretanja materijala do više skladišta.



Slika 89. Šema kretanja materijala od transportnog sredstva (T.S) do skladišta (S1 do S7)

Količina materijala koji se kreće je data u broju paleta na čas ili veličina m^3 na čas.

4.2.1.3 Grafički prikaz procesa izrade

Da bi se sačinio grafički prikaz procesa izrade, neophodno je napraviti jedan dijagram tehnoloških operacija obrade i tok kretanja materijala. To se postiže označavanjem određenih simbola. Na slici je prikazana tehnološka karta koja sadrži detaljan opis celokupnog tehnološkog procesa.

Tehnološka karta sadrži detaljan opis celokupnog tehnološkog procesa. U ovu kartu se unose sledeći obrasci:

- opis operacije sa odgovarajućim razvrstavanjem,
- rastojanja za transport,
- vreme trajanja,
- količina,
- mogućnost poboljšanja postojećeg stanja.

Uobičajeno se rade dve tehnološke karte:

- jedna za postojeće stanje,
- jedna za poboljšano stanje.

U tehnološkoj karti postoji odgovarajuća tabela u koju se unose rekapitulativni podaci o:

- postojećem stanju,
- postignutim uštedama u: dužini putanje materijala, vremenu trajanja i količini.

Naziv proizvodnog sistema		Tehnološka karta br. _____ -postojeće stanje -predloženo stanje					Broj lista: _____ Naziv pogona: _____				
Opis procesa:				Rekapitulacija							
				Sadašnje	Predlog	Razlika					
Materijal:		Broj operacija									
		Vreme (min)									
Uslovi rada:		Količina (kom)									
		Težina (t)									
		Rastojanje (m)									
Redni broj	Opis	Operacija	Transport	Kontrola	Zastoj	Skladištenje	Vreme	Rastojanje	Težina	Količina	Primedba
		○	→	□	⏸	▽	(min)	(m)	(kg)	(kom)	
Obradio:		Datum obrade:		Pregledao:		Datum pregleda:		Odobrio:		Datum odobrenja:	

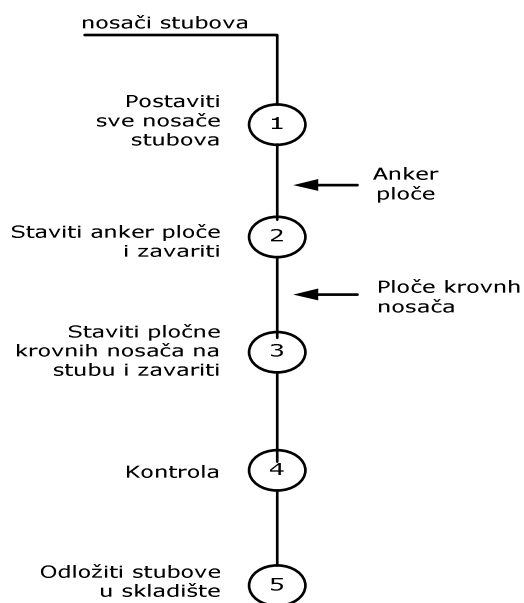
Slika 90. Izgled tehnološke karte

- - operacija
- - kontrola
- - transport
- ⏸ - zastoj
- ▽ - skladištenje
- ⊞ - kombinovana operacija

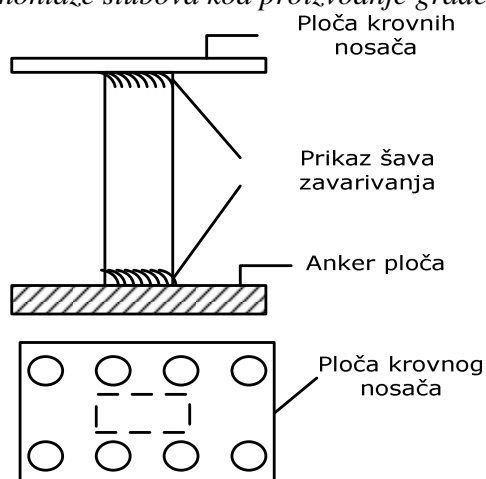
Slika 91. Simboli koji se koriste za tehnološku kartu

4.2.1.4 Grafički prikaz procesa kretanja materijala

Kod kretanja materijala mora se detaljnije opisati transport i kontrola kvaliteta kretanja materijala. Koristeći napred opisane simbole za određene aktivnosti formira se dijagram, kao i kod procesa izrade. Na slici 92. je data montaža stubova građevinske čelične konstrukcije.



Slika 92. Dijagram toka montaže stubova kod proizvodnje građevinske čelične konstrukcije



Slika 93. Izgled stuba građevinske čelične konstrukcije

4.2.1.5 Grafički prikaz izrade više proizvoda

Ako se vrši analiza procesa izrade više proizvoda paralelno, onda se svi proizvodi, sa definisanim tehnološkim redom, mogu prikazati kao na narednoj slici.

Oznaka proizvoda Tehnološka operacija	A (čelična konstrukcija)	B (čelična vrata)	C (čelična stolarija)	D (čelični nameštaj)
1. Isecanje profila	1	1	1	1
2. Isecanje cevi			2	2
3. Ostala isecanja	2	2	3	3
4. Priprema za zavarivanje	3	3		4
5. Priprema za lepljenje			4	5
6. Sastavljanje elemenata	4	4	5	6
7. Zavarivanje	5	5		8
8. Lepljenje			6	7
9. Čišćenje zavarenog šava	6	6		9
10. Čišćenje od korozije peskiranje	7	7	7	10
11. Bojenje osnovnom bojom	8	8	8	11
12. Farbanje završnom bojom	9	9	9	12
13. Lakiranje		10	10	13
14. Etiketiranje		11	11	14
15. Skladištenje	10	12	12	15
% od Q	40	16	21	23
Broj bodova				

Slika 94. Dijagram procesa izrade (proizvodnje) više proizvoda

Na slici su prikazane tehnološke operacije (vertikalno), koje su pobrojane po redu, sa tačnim nazivom i čija je oznaka od 1 do 15. U horizontali je data oznaka različitih proizvoda od A do D, koji se proizvode u posmatranom proizvodnom sistemu. Put svakog proizvoda je određen definisanim tehnološkim operacijama. Vrednovanje alternativa se može odrediti odgovarajućim sistemom bodovanja. Ovakav sistem se može koristiti kod projektovanja objekata za proizvodni sistem, koji se sastoji od više tehnoloških operacija, tako da se obuhvati celokupna proizvodnja.

4.2.1.6 Karta toka materijala

Karta toka materijala je slična tehnološkoj karti, ali sadrži vreme svih aktivnosti, rastojanje između pojedinih lokacija, odnosno dužinu transportnog puta, broj izvršioca koji obavljaju

određene aktivnosti i opremu koja se koristi za transport. Na slici 95. je prikazana karta toka materijala, koja može imati više različitih prikaza.

U zavisnosti od tipa proizvodnje prikazuje se karta toka procesa, koja mora da sadrži tačan tok kretanja materijala u zavisnosti od veličine tehnološkog procesa sa tačno definisanim tehničkim podacima. Tako se formira karta toka materijala za sve tehnološke procese proizvodnje i usluga.

Naziv preduzeća				Projekat:				LIST BR.				
KARTA TOKA MATERIJALA										Veza sa:		
Naziv procesa:								Materijal				
								Pakovanje				
Redni broj	Opis operacije						Rastojanje [m]	Količina [kom]	Masa [kg]	Potrebno	Broj radnika	Oprema
		Operacij	Kontrol	Transpo	Zastoj	Skladišt						
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
Ukupno:												
PRIMEDBE:												
										Datum:	Saradnik:	

Slika 95. Karta toka materijala

5. SKLADIŠTA

Skladište je prostor gde se odlaže dospelu roba – materijal za transformisanje u elemente, podsklopove, sklopove i proizvode. Materijal koji se upotrebljava u proizvodnom procesu naziva se reprodukcionim. Skladište služi i za sortiranje proizvoda, a to znači: sakupljanje, raspodela i formiranje zaliha. Iz ovoga proizilazi da je skladište neminovno u procesu proizvodnje, kako sa stanovišta nabavke, tako i stanovišta otpreme proizvoda. Pre nego što se isprojektuje skladišni prostor, neophodno je izvršiti analizu troškova. Uvek se teži da skladišni prostor bude racionalan i što manji, kako bi troškovi bili manji.

Skladišta u proizvodnom sistemu se mogu podeliti na:

- skladišta repromaterijala i pomoćnih materijala;
- skladišta gotovih proizvoda.

Skladište repromaterijala i pomoćnih materijala sadrži sve materijel neophodne za proizvodnju, koji se ne mogu uvek kupiti na tržištu, pa se vrši plansko uskladištenje. Sem repromaterijala, tu se nalaze i pomoćni materijali za realizaciju proizvodnog procesa (ulja, krpe, četke i dr). ovo skladište poseduje svoju kartoteku koja može biti ručna i kompjuterizovana, samostalna ili kao deo CIM sistema.

Skladište gotovih proizvoda služi za sortiranje i otpremanje istih po zahtevu kupca.

Skladišta u neproizvodnom sistemu imaju funkciju dopreme, istovara, identifikacije, sortiranja i paletizacije. Otprema do kupca se ostvaruje kroz prikupljanje narudžbenica, pakovanje i formiranje otpremne dokumentacije koja sadrži kompletnu specifikaciju sa nazivom proizvoda i količinom.

U ovom slučaju skladišni sistem se podrazumeva kao distributivni sistem.

Tok kretanja proizvoda kroz skladište se može definisati sledećim aktivnostima:

- prijem-istovar, identifikacija, sortiranje, paletizacija i dokumenti dopreme u skladište;
- kretanje robe u glavno skladište;
- prikupljanje porudžbina koje iziskuju sortiranje raznih proizvoda;
- na osnovu specificirane robe čije se informacije nalaze u porudžbenici, formira se otpremnica sa nazivom i količinom robe, na osnovu kartoteke skladišta. Zatim se vrši pakovanje zahtevanih proizvoda po nazivu i količini. Ukoliko je količina velika isti se stavljaju na paletu kao posebni paketi. Potom se vrši otprema kroz utovar u transportno sredstvo spoljne manipulacije.

5.1 Skladišni sistem

Skladišni sistem se posmatra kao mikrodistribucionni sistem. Ovaj sistem se sastoji iz više podsistema, i to:

- prijema robe,
- skladištenja robe,
- sortiranja robe sa stanovišta porudžbina,

- pakovanje i otprema,
- određivanje skladišnog prostora sa proračunom površine.

U narednom poglavlju će biti opisan svaki sistem pojedinačno.

5.1.1 Prijem robe

Pod pojmom roba se podrazumeva reprodukcion, pomoćni materijal i gotovi proizvodi.

Prijem robe počinje od istovara sredstva spoljašnjeg transporta. Istovar se obavlja sredstvima unutrašnjeg transporta ili ručno, u zavisnosti od mase i gabarita tereta. Sigurno roba velike mase i gabarita se istovara transportnim sredstvom, dok se manji predmeti koji čine robu istovaruju ručno.

Svaka doprema robe sadrži tehničku dokumentaciju, koja sadrži naziv i količinu robe sa određenim značajnim karakteristikama. Analiza dokumentacije pokazuje lokaciju i naziv skladišta, prioritet prijema, vreme istovara i način obezbeđenja robe prilikom skladištenja. Zatim se vrši identifikacija i sortiranje robe.

Prijem robe znači da se počinje sa pripremom za uskladištenje, a to znači sortiranje, vreme zadržavanja i formiranje skladišne jedinice. Najbolji je slučaj kada je transportna jedinica jednaka skladišnoj jedinici. Kad su iste jedinice, onda je vreme robe minimalno. Isto se odnosi i na prijem robe za skladišta proizvodnog sistema.

5.1.2 Skladištenje robe

Skladištenje robe predstavlja vremensko odlaganje robe, a svaka roba ima svoj vek trajanja u skladištu. Roba koja se skladišti se formira u transportne jedinice. Transportna jedinica sadrži jedan ili više artikala.

Lokacija (položaj) pojedinih materijala i roba koji se pakuju u palete, može biti određena na tri načina:

Stalne lokacije unutar skladišta. To je stalno mesto gde se odlaže roba sa definisanom količinom i artiklima. Ovo skladištenje zahteva minimalne troškove transporta, pri čemu je skladište nedovoljno iskorišćeno.

Slučajne lokacije se formiraju na bazi slobodnog prostora u skladištu. Ovde je prostor maksimalno iskorišćen u zavisnosti od artikla i asortimana robe i primeni modela zaliha. Nedostatak ovog sistema je stalna promena lokacije, što iziskuje primenu računara.

Podela skladišta na zone se može definisati kao fiksna lokacija u odnosu na zadatu zonu, a u okviru zone je slučajna lokacija. Ovaj način skladištenja je pogodan kod sličnih proizvoda.

Način uskladištenja može biti:

- ručno skladištenje robe, čija je ambalaža u obliku kutija i može se formirati na paleti. Ovakva roba je standardizovana i svaki proizvod ima svoju geometriju, koja je specifična. Ovakvo skladištenje je skupo i zahteva dosta fizičkog rada;
- skladištenje viljuškarima paletizovanih proizvoda. Skladištenje se vrši viljuškarima različite visine i nosivosti. Viljuškari mogu biti motorni, koji su nepogodni zbog izduvnih gasova, ali

u otvorenim skladištima se mogu koristiti, i električni viljuškari koji imaju veću količinu baterija napunjenih strujom;

- skladištenje sa skladišnim dizalicama, paletizovanih proizvoda. Ovakav način skladištenja je isti kao prethodni, ali se koriste dizalice. Paletizovani proizvodi podrazumevaju da su isti složeni na paleti, jer se tako skladišti veći broj proizvoda, koji su složeni u kutiju ili neko drugo pakovanje. Palete se mogu skladištiti po podu sa tačno definisanim blokovima. Kod skladištenja u blokovima, mogu se slagati palete jedna na drugu u visinu (slaže se 6 do 8 paleta). Sem toga, palete se mogu skladištiti u regalima. Regali su sredstva za skladištenje koja imaju svoju dužinu, širinu i visinu. postoje visokoregalna skladišta, gde je visina regala određena u zavisnosti od maksimalne visine koju doseže dizalica.

Visokoregalna skladišta mogu da se opslužuju i "štapel - dizalicama", koje se kreću po podu regala. Palete kod ovog skladištenja se formiraju u blokove transportnih jedinica.

Regalno skladištenje se deli u tri grupe:

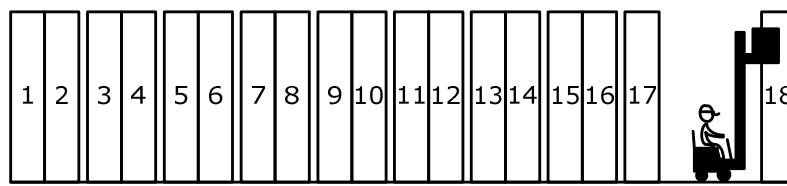
- regali i teret su nepokretni,
- regali su nepokretni, a teret se kreće,
- regali i teret se kreću. [63]

Regali i teret su nepokretni obuhvata konvencionalno regalna i visokoregalna skladišta. Konvencionalna skladišta su visine od 6 do 8m, a najveće iznosi 12m. Do 6m transport se vrši viljuškarima, a preko 6 m specijalnim viljuškarima. Visokoregalna skladišta su visine od 7 do 30m, a maksimalno do 45 m. Opslužuje se regalnim dizalicama.

Regali su nepokretni, a teret se kreće obuhvata protočna skladišta. "Sastoje se od niza staza sa valjcima i rolnama, u kojima se skladište pojedine transportne jedinice." [63] Postoji samo jedno mesto za uskladištenje, pa je mogućnost automatizacije velika.

Prednost ovih skladišta, koja su protočna su u velikom iskorišćenju skladišnog prostora, a nedostatak je skupa konstrukcija regala.

Regali i teret koji se kreću predstavljaju sistem koji je prikazan na slici.



Slika 101. Skladišta sa pokretnim regalima

Ovde se ostvaruje visoki stepen iskorišćenja. Pokretanje regala i tereta se vrši u sinhronizaciji sa ostalim operacijama. U narednoj tabeli je prikazano skladištenje pojedinih sistema.

Tip skladišta	$\frac{A_k}{A_u}$ [%]	Lokacije koje se normalno koriste	Površina sklad. koja se stvarno koristi u %	Direktan pristup paletnom mestu u %	Mogućnost oštećenja proizvoda

Regalno skladište	39	100	39	100	mala
Skladište "drive in"	75	60	45	10-20	velika
"Blok" skladište	70	70	49	5-10	velika
Protočno skladište	75	70	53	10-20	norm.
Visoko regalno skladište	60	100	60	100	mala
Sklad. sa pok. regalima	85	100	85	100	mala
Napomena: A_k – korisna površina A_u – ukupna površina skladišta					

Tabela 35. Tabela upoređenja karakteristika skladištenja

~Konvencionalno regalno skladište, a opsluživano viljuškarom, hodnik je postavljen između svakog para regala;

- blok skladište sa glavnim hodnikom postavljen posle svakih mesta redova paleta po dužini;
- protočno skladište opslužuje se viljuškarom sa obe strane;
- visokoregalno skladište opslužuje se regalom dizalicom, hodnik je postavljen između svakog para regala;
- skladište sa pokretnim regalima opsluživano viljuškarom." [63]

Međuprostori između regala su uvek isti za širinu palete. To važi za sve sisteme uskladištenja.

5.1.3 Sortiranje robe

Sortiranje robe se vrši prema zahtevu naručioca, da bi se ista isporučila. Sortiranje zahteva da se postojeća uskladištena roba može transportovati, kao što je uskladištena, što je retkost ili se formiraju nove transportne jedinice. To formiranje se ostvaruje u skladištu u kome se roba uzima, ili na mestu gde se formiraju transportne jedinice, koje se smatra komisionim skladištem. Pri formiranju transportne jedinice su veoma važne da se zahtev kupca (narudžbenica) utvrdi u što kraćem roku, a da su putevi kretanja robe pri uskladištenju do mesta isporuke minimalni. Mesto isporuke je mesto formiranja transportne jedinice, gde je isporuka različita i zahteva različito vreme isporuke.

5.1.4 Pakovanje

Kada se otprema prikuplja i kompletira, vrši se zahtev narudžbenice. Kada se kompletira narudžbenica, roba se pakuje u transportne jedinice, gde se kasnije utovara u prevozno sredstvo spoljnog transporta ili se pakuje za potrebe proizvodnje u sredstvo unutrašnjeg transporta.

Nekada spakovana roba odlazi u odeljenje za otpremu robe. Pozicije robe koja se otprema treba uvek grupisati.

5.1.5 Utovar i otprema

U ovom delu se posmatra sistem pripreme i odnošenja robe naručiocu. Po pakovanju robe, ista se isporučuje naručiocu i to predstavlja vezu skladišta i naručioca. To se obavlja sledećim aktivnostima: odnošenje robe iz skladišta, gde je izvršeno pakovanje, odnošenje robe do mesta za utovar u spoljašnji transport, kontrola pakovanja, formiranje dokumentacije otpreme, adresiranje i utovar. Dokumentacija se formira na osnovu zahteva naručioca i pakovane robe, koja se popunjava kroz dokument otpremnica, prikazan na slici 102. Tu se unose podaci: naziv robe, količina sa jedinicom mere, šifra robe, kontrolor količine robe i kvaliteta, potpis otpremača i kontrole.

OTPREMNICA ROBE					
Naziv otpremača _____					
Adresa primaoca _____					
Red. br	NAZIV ROBE	KOLIČINA ROBE U _____	KVALITET	KONTROLISAO	OTPREMIO

Datum _____			Datum _____		
Otpremio _____			Primio _____		
Primedba: _____					

Slika 102. Izgled otpremnice

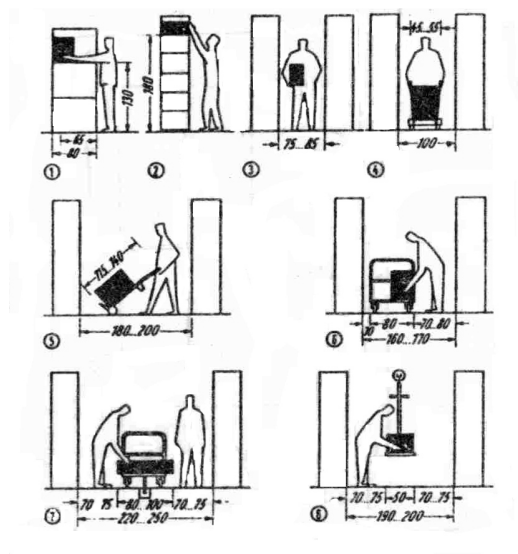
Utovar se vrši ručno ili mehanizovano, uz pomoć nekog prevoznog sredstva, kao što je viljuškar, dizalica ili automatski uz pomoć pokretnog transportera.

5.2 Skladišni prostor

U zavisnosti od vrste i količine robe, određuje se mesto gde se vrši uskladištenje. Skladištenje robe se može obaviti na tri načina:

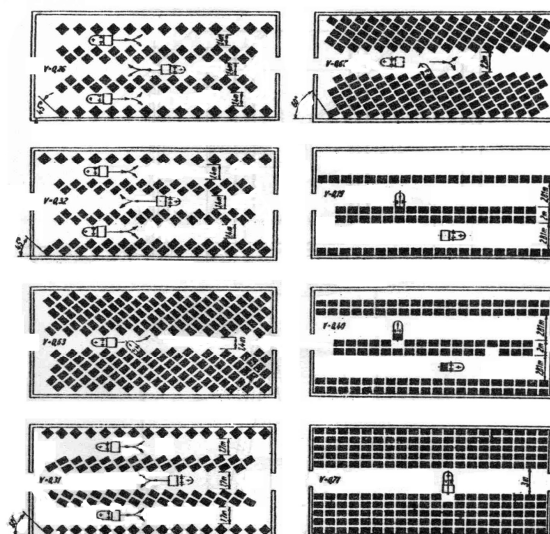
- ručno,
- blok skladištenje
- regalno skladištenje.

Ručno skladištenje se može obaviti različito, a najviše zavisi od primenjene mehanizacije transporta, kao što je prikazano na slici 103.



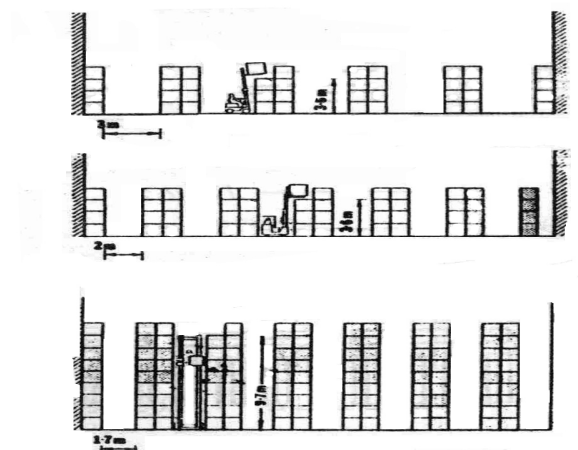
Slika 103. Primeri ručnog skladištenja

Blok skladištenje se obavlja na prostoru, gde je roba spakovana u blokove. Step en korišćenja skladišta je različit, jer zavisi od položaja paleta, što je prikazano na slici 104.



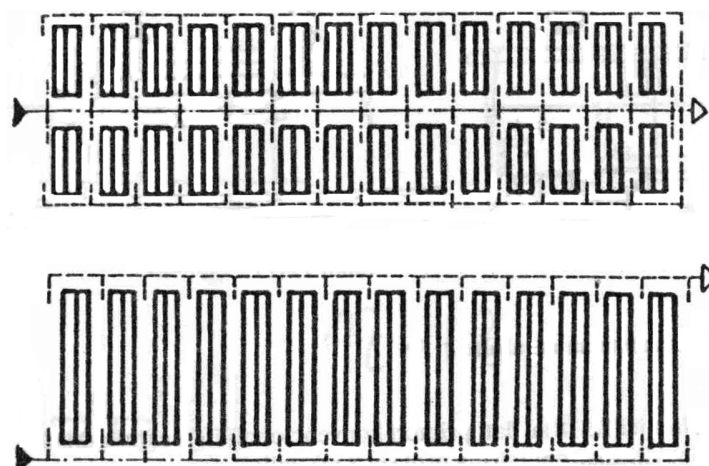
Slika 104. Različita blok skladišta

Regalno skladište se sastoji od regala, gde se transport između njih obavlja različitim tipovima viljuškara, što je prikazano na slici 105.

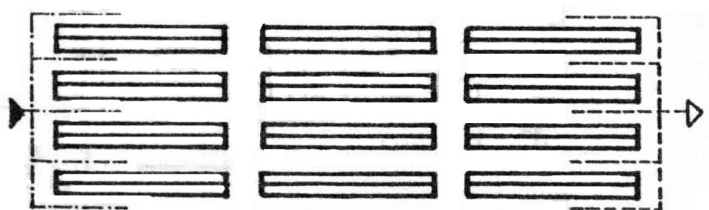


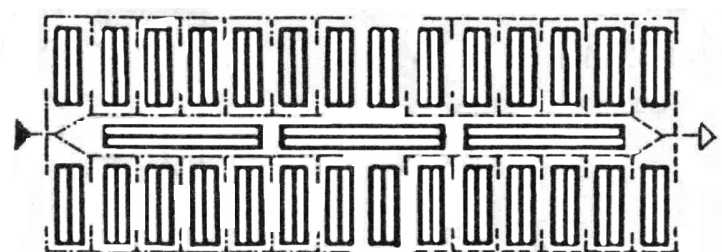
Slika 105. Konvencionalna regalna skladišta

Na narednoj slici je predstavljena šema klasičnih regala sa naznačenim transportnim putevima.



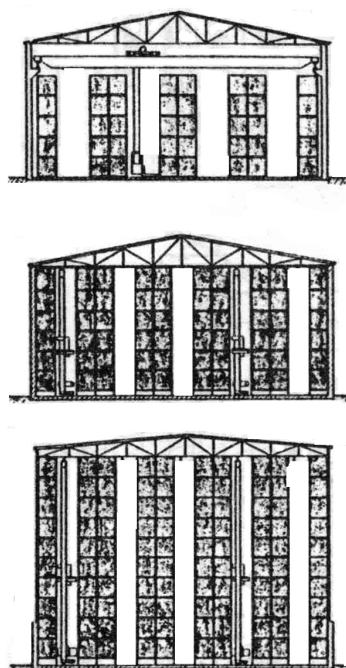
Slika 106 a. Klasični regali sa transportnim putevima





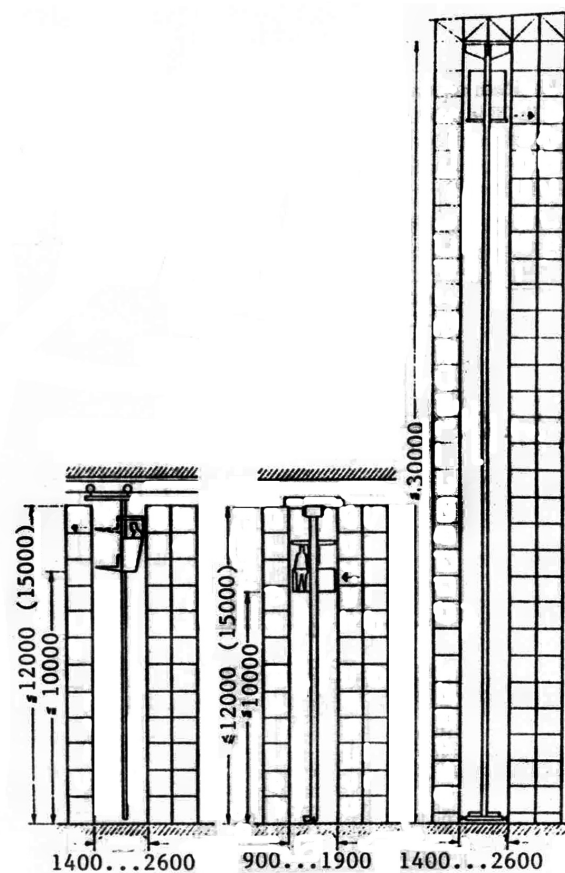
Slika 106 b. Klasični regali sa transportnim putevima

Na narednoj slici 107. je prikazano uskladištenje paleta primenom skladišnih dizalica.



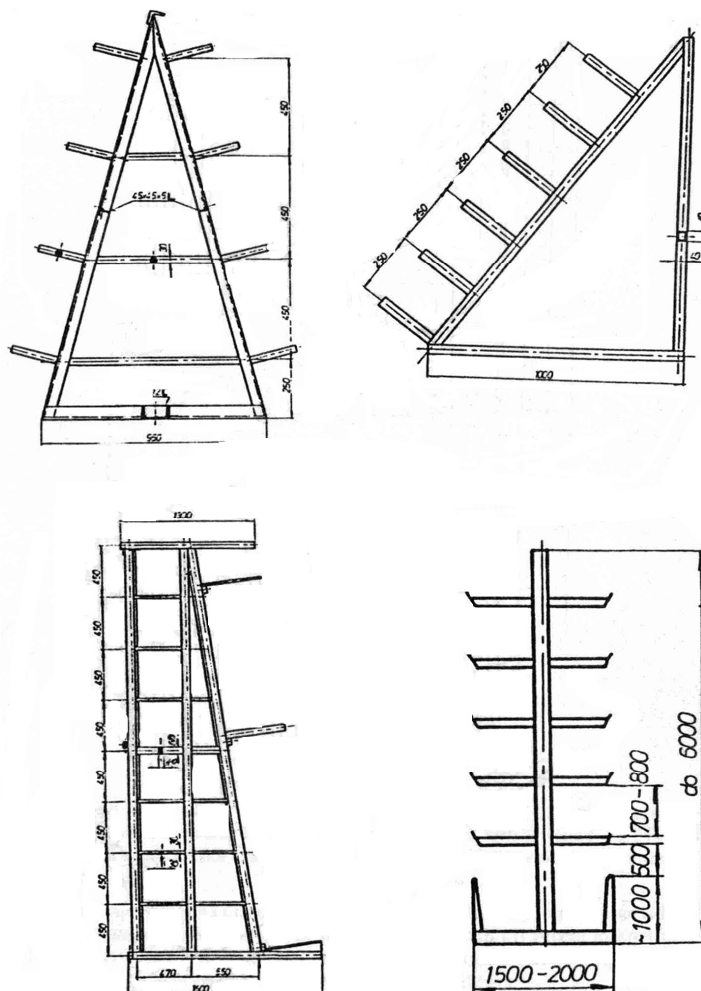
Slika 107. Uskladištenje skladišnim dizalicama

Na narednoj slici su prikazane osnovne dimenzije regalnih i visokoregalnih skladišta.



Slika 108. Dimenzije regalnih i visokoregalnih skladišta

Za uskladištenje reprodukcionog materijala (šipke, cevi, profil), velike dužine, koriste se specijalni regali koji su prikazani na slici 109, opslužuju se ručno, kranovima ili viljuškarima koji mogu biti i bočni.



Slika 109. Specijalni regali

5.2.1 Proračun površina skladišta

Površina skladišta se određuje po obrascu:

$$A_u = A_k + A_m + A_p \text{ [m}^2\text{]} \dots \dots \dots (176)$$

gde je:

- $A_u \text{ [m}^2\text{]}$ - ukupna površina skladišta;
- $A_k \text{ [m}^2\text{]}$ - korisna površina na kojoj se čuva roba;
- $A_m \text{ [m}^2\text{]}$ - manipulativna površina obuhvata glavne , pomoćne i manipulativne puteve;
- $A_p \text{ [m}^2\text{]}$ - pomoćne površine obuhvataju površinu stubova, sigurnosne prolaze (rastojanje između uskladištene robe i zidova, koji iznosi minimum 0,8m), prolaza za evakuaciju u slučaju požara, prostor oko hidranata i protivpožarnih

aparata, kancelarije, sanitarne prostorije itd.

Korisna površina A_k [m²] blok skladišta se izračunava na sledeći način:

$$A_k = 1,2 \frac{N_{sj} A_{sj}}{BR_{sj}} [m^2] \dots\dots\dots (177)$$

- A_k [m²] - korisna površina skladišta;
- N_{sj} [-] - ukupan broj skladišnih jedinica;
- A_{sj} [m²] - površina skladišne jedinice;
- BR_{sj} [-] - broj redova skladišnih jedinica po visini;

Skladišna jedinica može biti i transportna jedinica. Korisna površina skladišta se proverava u odnosu na nosivost poda:

$$A_k > \frac{N_{sj} \cdot G_{sj}}{p} [m^2] \dots\dots\dots (178)$$

- A_k [m²] - korisna površina skladišta;
- N_{sj} [-] - ukupan broj skladišnih jedinica;
- G_{sj} [KN] - težina skladišne jedinice;
- $p \left[\frac{KN}{m^2} \right]$ - nosivost poda skladišta;

Korisna površina regalnog skladišta je:

$$A_k = A_{pm} \cdot BR_{pm} \cdot BR_r [m^2] \dots\dots\dots (179)$$

gde je:

- A_k [m²] - korisna površina skladišta;
- A_{pm} [m²] - površina jednog paletnog mesta;
- BR_{pm} [-] - broj paletnih mesta duž jednog regala;
- BR_r [-] - broj regala na skladištu;

Visina skladištenja (H_s) zavisi od visine paletnog mesta (h_{pm}) i broja redova skladišnih jedinica po visini (BR_{sj}) iznosi:

$$H_s = h_{pm} \cdot BR_{sj} [m] \dots\dots\dots (180)$$

gde je:

- H_s [m] - visina skladištenja;
- h_{pm} [m] - visina paletnog mesta;
- BR_{sj} [-] - broj redova skladišnih jedinica po visini;

pri čemu treba da bude zadovoljen uslov:

$$h_{pm}(BR_{sj} - 1) + 300mm < H_{du} [m] \dots\dots\dots (181)$$

H_{pm} [m] -visina paletnog mesta;

BR_{sj} [-] - broj redova skladišnih jedinica po visini;

H_{du} [m] - visina dohvata uređaja za skladištenje, a
zavisi od tehničkih mogućnosti usvojenog
uređaja;

Odnos visine skladištenja (h_s) prema dužini skladišnog hodnika (L_s) određuje se za minimalni transprotni učinak. Kod visokoregalnih skladišta ovaj odnos iznosi:

$$\frac{H_s}{L_s} = \frac{1}{5} \div \frac{1}{4} [-]$$

gde je:

H_s [m] - visina skladištenja;

L_s [m] - dužina skladišnog hodnika;

Postoje pokazatelji koji iskazuju kvalitet skladištenja:

- iskorišćenje površine skladišta, gde je

$$\eta_s = \frac{A_k}{A_u} [\%] \dots \dots \dots (182)$$

η_s [-] - stepen iskorišćenja površine skladišta;

A_k [m²] - korisna površina skladišta;

A_u [m²] - ukupna površina skladišta;

- iskorišćenje zapremine skladišta, gde je:

$$\eta_v = \frac{V_r}{V_s} [\%] \dots \dots \dots (183)$$

η_v [-] - stepen iskorišćenja zapremine skladišta;

V_r [m³] - zapremina robe na skladištu;

V_s [m³] - zapremina skladišta;

$$V_s = A_k \cdot H [m^3] \dots \dots \dots (184)$$

A_k [m²] - korisna površina skladišta;

H [m] - visina skladišnog prostora;

Sigurno je da postoji više načina za proračun površina skladišta, ali ovde su prikazani oni koji se najčešće koriste.

II DEO

1. DISKRETNi LOKACIJSKI MODELI

Za razliku od kontinualnih modela, u diskretnom lokacijskom problemu treba izabrati jednu ili više novih lokacija (ili centara) iz konačnog, unapred zadatog skupa mogućih lokacija. Jasno je da se prebrojavanjem (enumeracijom) svih mogućih kombinacija novih lokacija može doći do tačnog (optimalnog) rešenja, odnosno do rešenja u kome funkcija cilja dobija minimalnu vrednost, ali u slučaju velikog broja korisnika i novih objekata, ovaj proces može na računaru trajati veoma dugo. Drugim rečima, većina diskretnih lokacijskih problema je NP-teško. Zbog toga su i metode rešavanja najčešće heurističke. Naravno, osnovna razlika u metodama rešavanja kontinualnih i diskretnih lokacijskih zadataka sastoji se u tome što prvi koriste metode nelinearne i globalne optimizacije, dok drugi modeli koriste tehnike kombinatorne optimizacije.

Klasifikacija ovih modela je slična klasifikaciji kontinualnih: i kod diskretnog lokacijskog zadatka razlikuju se problemi sa jednim ili više novih objekata, minisum ili minimax problem, lokacijski-alokacijski zadaci, problemi lociranja neželjenih objekata, itd.

Iako su diskretni modeli daleko bolje nadešavaju na realne probleme, zbog ograničenosti prostora njih nećemo izložiti u istom stepenu detaljizacije kao i kontinualne. Ograničićemo se na verbalnu i matematičku formulaciju problema i najčešće, na najpoznatiju metodu rešavanja. Čitaoca koji želi detaljnije informacije uputićemo na knjige Daskin (), Love i dr. (88) ili Drezner ed. (95) ili na preglede radova: Brandon i Chin (89), Hansen i Tisse () ili

1.1 Lokacija jednog objekta

Analogni problem Veberovom (minimizovati ukupne troškove prevoza) u diskretnom slučaju (treba locirati samo jednu tačku) je

$$(\min) f_j = \sum_{i=1}^m w_i d_{ij},$$

gde su

m - broj datih tačaka korisnika

n_i - broj mogućih lokacija

$w_i = n_i \cdot r_i$ (n_i - broj korisnika u i -toj tački)

r_i - cena jediničnog transporta od i -tog korisnika,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \\ d_{m1} & & d_{mn} \end{bmatrix} - \text{data rastojanja.}$$

Algoritam se sastoji od jednostavnog poređenja za svako j . Njegova složenost je očigledno $O(m \cdot n)$. Dakle, diskretni analogon Veberovog zadatka je jednostavan, tj. polinomijalno rešiv.

1.2. p - težišni problem

Ovaj problem predstavlja diskretnu verziju lokacijsko - alokacijskog problema: dat je skup U lokacija m korisnika i skup L lokacija n potencijalnih novih objekata; treba odrediti kojih p između njih n treba izabrati tako da ukupni transportni troškovi između novih objekata i korisnika budu minimalni, a da u potpunosti budu zadovoljeni zahtevi svih korisnika.

Kombinatorna formulacija ima oblik

$$(\min) \sum_{i=1}^m \min_{j \in J} t_{ij}, \quad (1)$$

gde je $J \subseteq L, |J| = p$, a t_{ij} elementi date pravougaone matrice dimenzija $m \times n$, koji predstavljaju transportne troškove od i -tog korisnika do j -tog snabdevača. Ovaj zadatak se može formulisati i kao zadatak mešovitog linearnog programiranja.

$$(\min) f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = p \quad (4)$$

$$1 \leq x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

gde su:

m – broj datih tačaka korisnika

n – broj mogućih lokacija

p – broj novih objekata

x_{ij} - proporcija zadovoljenja i -tog zahteva od j -tog snabdevača (alokacijske promenljive)

t_{ij} - cena transporta (ili rastojanje) od i -tog korisnika do j -tog novog objekta,

$y_j = \begin{cases} 0, & \text{ako ne treba otvoriti objekat na lokaciji } j, \\ 1, & \text{ako treba otvoriti objekat na } j \text{ - oj lokaciji.} \end{cases}$

Jednačine (3) u modelu iskazuju uslov da zahtev i -tog korisnika u potpunosti mora biti ispunjen, uslov (4) kaže da broj otvorenih objekata mora biti konačno p , dok uslovi (5) kažu da se korisnici mogu snabdevati samo u otvorenim objektima.

Primetićemo da će se zbog pretpostavke neograničenosti kapaciteta novih objekata svaki korisnik snabdevati kod svog najbližeg snabdevača, tj. kod onoga kod koga je cena transporta najmanja. Iz tog razloga i lokacijske promenljive x_{ij} će u optimalnom rešenju dobiti vrednosti 0 ili 1. Dakle,

umesto uslova $1 \leq x_{ij} \leq y_j$, može se pretpostaviti $x_{ij} \in \{0,1\}$ takođe, pa dobijamo model 0-1 programiranja.

p -težišni model ima značajnih primena u praksi: lokacije industrijskih postrojenja, skladišta, javnih objekata itd. (videti npr. Christofides 1975 za listu primena). Pored ovih lokacijskih primena, model može poslužiti i u druge svrhe, na primer, u izboru koordinata u finalizaciji složenog proizvoda (Mladenović).

Problem nalaženja p -težišta je NP-težak (Kariv i Hakimi, 1969). Zbog njegovog značaja, veliki broj egzaktnih i heurističkih metoda je predloženo u literaturi u cilju nalaženja rešenja. Tačne metode su uglavnom bazirane na 0-1 formulaciji i na metodi grananja i ograđivanja. Najpoznatije klasične heuristike su: a) Pohlepna (Kuhn i Hamburger, 1963); b) Štedljiva; c) Alternativna (maranzana, 1964) i d) Zamena mesta (Interchange). Izložićemo ukratko ove metode zbog opšte primenljivosti ovih klasičnih heurističkih načela i na druge kombinatorne zadatke.

a) Pohlepna (Greedy) heuristika

Korak 1. Rešiti problem nalaženja jedne (tj. najbolje) lokacije (kao u 2.2.1); na taj način je određena jedna od ukupno p novih tačaka.

Korak 2. Ako je broj novih objekata jednak p , kraj.

Korak 3. Pretpostavimo da je nađeno k novih lokacija. Izabрати $k + 1$ tačku među preostalim $n - k$, tako da kada se svakom korisniku pridodeli najbliži centar (poznatih k i svaki od $n - k$) ukupna cena transporta bude najmanja. Preći na Korak 2.

Ideja pohlepnih heuristika je upravo u nalaženju najboljeg rešenja u svakom koraku. Polazi se od nule i "grabežljivo" se ide ka rešenju. Nasuprot njima je Štedljiva (ili Kir-Janja) heuristika u kojoj se polazi od pretpostavke da imamo sve (svih n objekata je već locirano) i u svakom koraku se trudimo da što manje izgubimo (izbacimo centar koji najviše opterećuje troškove transporta). Cilj je naravno da se dobije dopustivo rešenje i čim se to postigne, procedura je završena.

O Alternativnoj heuristici je već bilo reči u 2.1.5 kada se govorilo o Kuperovoj metodi rešavanja kontinualnog lokacijsko-alokacijskog problema. I u diskretnom slučaju se naizmenično nalaze nove lokacije (na početku je to proizvoljan skup od p objekata) pa se zatim određuje gde će se koji korisnik snabdevati. Za tako dobijene grupe korisnika određuju se novi bolji centri (lokacije), ukoliko takvi postoje; itd. Ako nema poboljšanja rezultata između 2 iteracije, heuristika prestaje sa radom.

I u heurističkoj metodi zamene se prvo nalazi proizvoljno rešenje, tj. bilo koji skup od p tačaka i nađe se vrednost funkcije cilja za to rešenje (naravno, pridruživanjem svakog korisnika najbližem centru). Evo njenih koraka:

d) Heuristika zamene mesta

Korak 1. Naći početno rešenje, tj. izabрати proizvoljan skup J , $J \subseteq L, |J| = p$, i naći vrednost funkcije koristeći (1).

Korak 2. Za svaki centar j iz skupa J i za svaki centar k iz skupa $L \setminus J$ uraditi sledeće:

- (i) zameniti centar j iz rešenja jednim koji trenutno nije u rešenju (k);
- (ii) izračunati promenu u funkciji cilja f_{jk} nastalu ovom zamenom;
- (iii) zapamtiti indekse j i k gde je f_{jk} bilo najmanje i odgovarajuće indekse obeležiti sa j' i k' ;

Korak 3. Ako je $f_{j'k'} > 0$, kraj (dobijen je tzv. lokalni minimum J);

Korak 4. Ažurirati novo rešenje kao $J \leftarrow J \setminus \{j'\} \cup \{k'\}$ i preći na Korak 2.

Od ovih klasičnih heuristika najbolji rezultati su dobijeni metodom zamene mesta. Zapravo, najčešće se za početno rešenje za heuristiku zamene uzima rešenje dobijeno pohlepnom heuristikom.

Od metaheurističkih pristupa u rešavanju p -težišnog problema pomenućemo neke: (i) metodu Tabu traženja predložili su Mladenović i dr. (96), Voss (96), Rolland (969); (ii) metoda promenljivih okolina testirana je u radovima Hansena i Mladenovića (1997 i 1999). Na detaljnijem opisu ovih procedura se nećemo zadržavati.

1.3 Jednostavni zemljišni problem (JZP)

Razlika između p -težišnog i jednostavnog zemljišnog problema (JZP) je mala. U ovom drugom ne figuriše uslov da mora biti locirano tačno p novih objekata. Pored toga, u model su uključeni i troškovi instalacije (otvaranja) novog objekta f_j (cena zemljišta, cena gradnje i sl.). Model ima oblik

$$(\min) f(x, y) = \sum_{j=1}^n f_j y_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

gde je f_j - cena postavljanja (izgradnje) j -te lokacije. Napomenimo da su značenja ostalih parametara modela već ranije definisana. Obeležimo sa RZP relaksacioni JZP model, tj. model u kome je ograničenje celobrojnost $y_j \in \{0, 1\}$ obrisano.

Najpoznatiju metodu rešavanja predložio je Erlenkotter (78) i nazvao DUALOC. Ona rešava dualni zadatak zadatka RZP, pa je nazvana DRZP:

$$\max_{v, w} g(v) = \sum_{i=1}^m v_i$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^m w_{ij} \leq f_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$v_i - w_{ij} \leq n_i t_{ij}, \quad i = \overline{1, m} \text{ i } j = \overline{1, n}$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \text{ i } j = \overline{1, n}$$

gde je $w_{ij} = \max\{v_i - t_{ij}, 0\}$. Vidimo da je prilikom formulisanja ovog dualnog modela uslov $y_j \in \{0, 1\}$ eliminisan, tj. relaksiran. Ideja DUALOC-a je sledeća. Neka $v(\cdot)$ označava vrednost funkcije cilja. Očigledno važi $v(JZP) \geq v(RZP) = v(DRZP)$. Nalaženjem rešenja DRZP (dualnog) problema, dobijamo dakle donju granicu za primalni JZP zadatak.

Metoda DUALOC u prvoj fazi nalazi približno rešenje dualnog modela. Pri tom koristi dve procedure: takozvanu metodu dualnog uspona (dual ascent), a zatim dobijeno rešenje lokalno poboljšava metodom dualnog poravnanja (dual adjustment). U drugoj fazi se dobijeno rešenje koristi kao donja granica u okviru metode grananja i ograđivanja.

Iako je jednostavni zemljišni problem (u engleskoj literaturi poznat kao Simple plant Location ili Uncapacitated Facility Location problem) NP-težak, vrlo često se već posle prve faze metode DUALOC dobija optimalno rešenje. To se objašnjava činjenicom da se često zanemarivanjem uslova celobrojnosti promenljivih y_j (relaksacijom) ipak dobije veliki procenat celobrojnih rešenja.

Ideju heuristike dualnog uspona, koja je po našem mišljenju značajna i primenljiva i na druge kombinatorne zadatke, izložićemo na primeru.

Primer ****. Cene prevoza t_{ij} date su u sledećoj tabeli (str. 190):

1.4. Prekrivanje skupa

a) (Set - covering problem)

U zadatku p - težišta, ne postoje ograničenja korisnika u pogledu novčanih maksimalnih sredstava $\bar{t}_i$. U zadatku prekrivanja skupa treba odrediti optimalan broj novih objekata u zavisnosti od raspoloživih sredstava, tj.,

$$(\min) f(y) = \sum_{j=1}^n f_j y_j$$

p.o.

$$\sum_{j \in N_i} y_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gde je $N_i = \{j / t_{ij} \leq \bar{t}_i\}$.

Ovaj problem je takodje NP - težak.

b) maximal covering problem (Fransis, white 74)

Zadatak je sledeći: maksimizovati broj poseta (ili poziva) u odnosu na novčana ograničenja $\bar{t}_i$,

$$(\min) f(y, c) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{ij} c_{ij} \quad N_{ij} = \begin{cases} N_i, & t_{ij} \leq \bar{t}_i \\ 0, & t_{ij} > \bar{t}_i \end{cases}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$c_{ij} \leq y_j$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum y_j = p.$$

1.5. Problem p - centra

Ovaj zadatak predstavlja analogiju sa Raulsovim kontinualnim problemom (Hakimi 65). Pitanje je kako odrediti lokacije p - novih objekata, tako da se minimizuju maksimalni troškovi transporta korisnika, u odnosu na najbliži objekt, tj.,

$$\min f(y, c) = \max n_i \cdot t_{ij} \cdot c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$c_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$c_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = p.$$

Oznake u modelu imaju ranije određena značenja. Minieka (70) je predložio metodu kojom se rešava niz zadataka prekrivanja skupa.

2. MREŽNI LOKACIJSKI MODELI (MLM)

2.1. Osobine rastojanja na mreži

Mreža (graf) određena sa $G = (T, L)$, gde je

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ skup temena grafa,

L je skup lukova (t_i, t_j) koji spajaju t_i i t_j . U daljem tekstu pretpostavićemo da je $i < j$.

Obeležićemo sa $I = \{1, \dots, m\}$ i takođe pretpostaviti sledeće:

- (i) svaka dva luka seku se u najviše jednom zajedničkom temenu,
- (ii) najviše 1 luk spaja svaka 2 temena,

Definišimo neke pojmove iz teorije grafova koje ćemo kasnije koristiti.

- Dva luka su *susedni* ako imaju bar jedno zajedničko teme,
- *Put* je niz povezanih lukova gde svaki par susednih lukova ima isto teme.
- Ako je početno teme puta jednako krajnjem, govorimo o *krugu* ili *ciklusu*.
- Put koji ne sadrži krug, je *jednostavan put*.
- Krug (ciklus) u kome se lukovi ne ponavljaju je *jednostavan krug (ciklus)*. Uvek će se govoriti ubuduće o jednostavnim putevima i ciklusima.
- *Dužina puta* je zbir dužina lukova u putu.
- *Rastojanje* između dva temena (t_i, t_j) je dužina najkraćeg puta od t_i do t_j . Očigledno važi $d(t_i, t_j) = d(t_j, t_i)$
- *Mreža* je *povezana* ako najmanje jedan put povezuje svaka dva temena. U suprotnom je mreža *nepovezana*. Ubuduće će sve mreže biti povezane, ako se ne naglasi suprotno.

Osnovno je pitanje kako definisati $d(x, y)$, kada su x i y dve proizvoljne tačke na lukovima. U tom cilju zamislimo da su i x i y nova temena; rastojanje $d(x, y)$ je sada definisano kao najkraći put između dva temena. Formalno, funkcija rastojanja zaista ispunjava:

- (1) simetričnost, $d(x, y) = d(y, x)$
- (2) pozitivnost $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = 0$ za $x = y$
- (3) nejednakost trougla $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, za svako x, y i z .

Osnovna ideja mrežnih lokacijskih modela je dakle u pretpostavci da je rastojanje na mreži jednako najkraćem rastojanju između svake dve njene tačke.

Stav 1. U datom grafu $G(T, L)$, neka je luk označen sa $(t_p, t_q) \in L$, $x \in (t_p, t_q)$ i neka je t_i bilo koje teme. Funkcija rastojanja $d(x, t_i)$ ima sledeće osobine:

- a) neprekidna na luku (t_p, t_q)
- b) ako x varira između t_p i t_q , tada ili

- $d(x, t_i)$ - linearno raste
- $d(x, t_i)$ - linearno opada
- $d(x, t_i)$ - prvo linearno raste pa opada
- c) $d(x, t_i)$ je konkavna i deo po deo linearna.

2.2. Lokacijski modeli na proizvoljnoj mreži

Kako su mrežni lokacijski modeli (MLM) najrealniji sa stanovišta primene, to se mogu razmatrati i pojedine specifične mrežne strukture, kako bi se dobili efektivnije i jednostavnije metode rešavanja.

U ovom delu razmotrićemo tri tipična lokacijska problema na proizvoljnom grafu, a u sledećem ćemo detaljnije obraditi metode rešavanja MLM u slučajevima kada je struktura mreže "stablo".

2.2.1. Problem n - težista

Problem p - težista je već ranije definisan. Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ skup težista koje treba odrediti i koje bi trebalo da se nađu na nekim lukovima mreže G . Označimo sa

$$d(X, t_i) = \min(d(x_1, t_i), \dots, d(x_p, t_i)), \quad i = 1, \dots, m$$

odnosno, pretpostavimo da je rastojanje skupa X i temena t_i jednako rastojanju najbližeg težista iz skupa X do t_i . Ako dodelimo nenegativne pondere svakom temenu (npr. broj stanovnika), $p_1, \dots, p_m$, tada funkcija cilja ima oblik

$$f(X) = \sum_{i=1}^m p_i d(X, t_i)$$

Zadatak je: odrediti n -težista (zvanih i apsolutnih n -težista) tako da $f(X)$ ima minimalnu vrednost. Osobine iz Stava 1 omogućuju dokaz sledećeg stava.

Stav 2. (Hakimi /1965/) - Osobina optimalnosti temena

Postoji najmanje jedno apsolutno p – težište za koje su sva težišta u temenima grafa.

Dakle, kao moguće nove lokacije treba razmatrati samo postojeće, tj. temena grafa. Očigledno je da problem nije trivijalan samo ako je $p < m$. U suprotnom bi bilo $f(X) = 0$ i svako težište bi se podudaralo sa temenom.

Kada je $n < m$, problem dakle postoje kombinatoran, jer treba naznačivati (izdvajati) n -torke iz skupa od m elemenata i nalaziti vrednosti $f(x)$ za svaku n -torku, (kojih ima $\binom{m}{n}$)

Zbog velikog mogućeg broja kombinacija, potpunim prebrojavanjem se rešava gornji problem jedino u slučaju $p = 1$ (naravno, u realnim problemima m je jako veliko).

2.2.2. Problem p - centara na proizvoljnoj mreži

Pretpostavimo da je skup centra $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ takav da svaki cenar y_j leži na luku datog grafa, i da je $p < m$. Obeležimo ponovo sa $d(Y, t_i)$, rastojanje proizvoljnog temena t_i do najbližeg centra iz skupa X . Potrebno je odrediti minimum funkcije

$$(\min) g(Y) = \max(p_1 d(Y, t_1), \dots, p_m d(Y, t_m)),$$

gde su p_i , $i = 1, \dots, m$, ponderi ili težinski koeficijenti pridruženi temenima. Rešenje ovog problema se naziva apsolutni centar i obeležićemo ga sa Y^* .

U problemu nalaženja jednog centra koristi se tzv. osobina temena i presečne tačke (TPT), koju ćemo izraziti u Stavu 3. Pre toga definišemo presečnu tačku.

Tačka na mreži y_{ij} je *presečna* samo ako je:

$$p_i d(y_{ij}, t_i) = p_j d(y_{ij}, t_j) \text{ za neko } i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ i } i \neq j.$$

Stav 3. Apsolutni 1-centar je ili u temenu t_i ili je presečena tačka. (F.Minieka:Them-centerproblem, SIAMRev. 12 (1970), 138-139.

Međutim, osobina TPT (izražena u Stavu 3) važi i za problem nalaženja n - centara.

Stav 4. Postoji najmanje jedan apsolutni p - centar za koji je svaki centar ili teme ili presečna tačka grafa.

Na taj način se problem od beskonačno mnogo tačaka rešenja svodi na konačan broj, odnosno na ispitivanje koja su od temena ili presečnih tačaka centri. Vidimo dakle da se i ovaj zadatak svodi na kombinatorni problem.

Najčešći način rešavanja problema i centara svodi se na rešavanje niza jednostavnijih tzv. problema prekrivanja, koji ćemo sada izložiti.

2.2.3. Problem prekrivanja na proizvoljnom grafu

O problemima prekrivanja bilo je više reči u poglavlju u kome su razmatrani Diskretni lokacijski problemi. Neka je u ravni dato m - tačka t_i kojima su pridružene konstante r_i . Treba odrediti

lokacije što manje novih tačaka iz datog skupa mogućih lokacija Y , tako da svih m -tačaka bude prekriveno, odnosno, treba naći

$$(\min) |Y|$$

p.o.

$$d(Y, t_i) \leq r_i, \text{ gde } |Y| \text{ označava broj članova skupa } Y.$$

2.3 Mreža tipa "STABLO"

Prethodni odeljak se odnosio na proizvoljnu mrežu. Ako specificiramo mrežu na tip "stabla", mnogi dodatni rezultati se mogu dobiti a metode rešavanja pojednostaviti. Mreža struktura stabla S ima sledeće osobine:

- (i) S je povezan graf bez krugova (ciklusa);
- (ii) postoji najkraći put između svake dve tačke u S

Postoji veliki broj razloga zašto se baš ovaj tip grafa posebno izučava u teoriji lokacije. Velike putne i železničke mreže konstruisane su kao stabla (npr. američke međudržavne magistrale, mađarska železnička mreža sa Budimpeštom na vrhu itd.). Rečni saobraćaj se takođe odvija po mrežama tipa stablo. Terminali na aerodromima imaju strukturu stabla, neke nove industrijske zone se grade po ovoj šemi. Struktura stabla je jako fleksibilna, je se lako može proširiti novim "granama".

Pored toga, mrežni lokacijski problemi na stablu se vrlo jednostavno rešavaju. Sledeći stav govori o osobini funkcije rastojanja na stablu.

- Stav 6.** a) Funkcija $f(x) = d(x, t)$ je konveksna za svako $t \in T$, ako i samo ako je $S(T, L)$ stablo.
 b) Funkcija $f(x, y) = d(x, y)$ je konveksna na celom grafu, ako i samo ako je graf tipa stablo.

Kao što je poznato, zbirni maksimum konveksnih funkcija je konveksna funkcija. Iz tog razloga u mreži tipa stablo funkcije $f(x)$ i $g(y)$ (za probleme nalaženja jednog težišta, odnosno jednog centra) su konveksne, pa je i svaki lokalni minimum ujedno i globalni.

2.3.1. Nalaženje 1- težišta na stablu

Problem 1- težišta je nalaženje nove tačke x^* na mreži, tako da se minimizuje zbir težinskih rastojanja od x^* do podskupa temena mreže. Tačka x^* se naziva apsolutno težište. Ako sa $f(x)$ označimo ukupno rastojanje između x i m temena, imamo

$$f(x) = p_1 d(x, t_1) + p_2 d(x, t_2) + \dots + p_m d(x, t_m),$$

gde $p_i, i = 1, \dots, m$, mogu predstavljati npr:

- broj dolazaka do x (poštanskog sandučeta) u datom vremenskom periodu iz temena t_i ,
- ukupni transportni troškovi po jedinici rastojanja iz temena t_i ,
- ukupno vreme po jediničnom rastojanju itd.

Označimo sa $p = \sum_{i=1}^n p_i$, a mreže. Sledeći algoritam (A.Goldman (1971), Optimal center location in simple network, Transportation Sci. 5, 212-221) rešava ovaj problem.

Algoritam 1.

Korak 1. Izabrati bilo koji list (teme povežemo lukom samo sa jednim temenom) t_1 sa težinom p_1 . Ako je $p_1 > p/2$, t_1 je rešenje i kraj.

Korak 2. Označiti sa t_0 teme koje je povezano sa t_1 i sabrati p_1 i p_0 kao novi ponder temena t_0 ($p_1 + p_0 = p_0$).

Izbrisati luk (t_0, t_1) i preći na Korak 1.

Iz algoritma se može izvući i interesantno svojstvo podstabla (odnosno pojedinih "grana" stabla).

(A.Goldman, C. Witzgall: A location theorem for optimal facility placement, Transportation Sci. u (1970) 406-409)

Stav 7. Neka je dato stablo S i bilo koji luk (t_p, t_q) . Ako izbrišemo sve unutrašnje tačke datog luka, dobićemo dva pod stabla, S_p i S_q . Ako je suma težina temena S_p najmanje $p/2$, tada S_p sadrži apsolutno težište.

Očigledna posledica ovog stava je da ako jedno teme grafa ima težinu ne manju od S $p_i/2$, tada je ono i apsolutno težište.

2.3.2. Nalaženje jednog centra na stablu

Podsetimo se da je apsolutni 1-centar y^* tačka na mreži koja minimizuje maksimalna težinska rastojanja od y^* do podskupa temena gafa. Pretpostavimo da taj podskup sadrži m - temena sa pozitivnim ponderima (težinama) $p_i, i = 1, \dots, m$. Matematički model je dakle

$$(\min) g(y) = \max(p_1 d(y, t_1), \dots, p_m d(y, t_m))$$

gde ponderi mogu imati različita značenja:

- vreme po jediničnom rastojanju

- cena prevoza po jedinici rastojanja
- gubitak po jedinici rastojanja.

Ako nova lokacija treba da uslužuje postojeće, tražena tačka treba da minimizuje maksimalno vreme, cenu prevoza ili gubitke odnosno traži se brzi servis tako što visina osiguranja od požara neke firme zavisiće od njenog rastojanja do najbliže vatrogasne stanice. Sličan je slučaj sa milicijskim stanicama i kolima hitne pomoći.

Prvo ćemo izložiti algoritam rešavanja za ne težinski slučaj problema nalaženja jednog centra, odnosno slučaj kod koga su svi $p_i = 1, i = 1, \dots, m$. Algoritam omogućuje sledeći Stav.

Stav 8. Apsolutni ne težinski 1-centar leži na sredini najdužeg puta na stablu.

Algoritam 2. (G.Handler (73): Minimax location of a facility in an undirected tree graph, Transport. Sci.7 (1973), 287-293)

Korak 1. Izabrati proizvoljno teme grafa, t ;

Korak 2. Naći najudaljeniji list od t i obeležiti ga - t' ;

Korak 3. Naći najudaljeniji list od t' i obeležiti ga t'' .

Apsolutni centar je na polovini t', t'' .

U praksi se često javlja problem nalaženja jednog centra u kome figurišu i neki dodatni parametri. Takvi modeli se mogu formulisati sa

$$(\min) g(y) = \max(p_1 d(y, t_1) + h_1, \dots, p_m d(y, t_m) + h_m)$$

gde $h_i, i = 1, \dots, m$ mogu predstavljati (ako $p_i d(y, t_i)$ tumačimo kao vreme potrebno za put od y do t_i

- vreme pripreme za put (npr. vatrogasci)
- vreme pripreme intervencije u temenima (npr. kod hitnih službi itd.).

Ukoliko je $h_i = 0$, tada se ovaj model "sa dodacima" poklapa sa modelom 1- centra.

2.3.3. Problem prekrivanja na stablu

Postoji više različitih formulacija problema prekrivanja (o nekima ćemo govoriti i u poglavlju diskretnih lokacija). Ovde će biti reči o jednom od jednostavnijih modela na stablu, koji se rešava jednostavnim algoritmom.

Jedna uslužna organizacija želi da otvori više novih punktova (koje nazivamo centrima), kako bi pokrila opsluživanje m korisnika lociranih u temenima mreže (graфа). Svaki korisnik ima tzv. prekrivajuće ograničenje, koje označava da rastojanje između njega i najbližeg centra ne sme

premašiti poznatu konstantu s_i . Uslužna (servisna) organizacija želi da otvori što manje novih centara, tako da svako pokrivajuće ograničenje bude zadovoljeno.

Tipični primeri ovakvih problema su otvaranje ekspozitura banaka, benzinskih pumpi, kioska za novine, restorana za brzu ishranu itd. Ti novi punktovi treba da prekriju određenu regiju.

Matematički model ima sledeći izgled

$$\begin{aligned} & (p) \quad (\min) |x| \\ \text{p.o.} \quad & d(X, t_i) \leq s_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gde je $X = (x_1, \dots, x_n)$ skup mogućih centara, a $|x|$ kardinalni broj

Da bismo jednostavnije opisali postupak rešavanja zadatka prekrivanja na stablu, zamislimo da je u svakom temenu pričvršćen kanap dužine S_i . Drugi kraj kanapa ćemo razvlačiti duž grafa i privezivati u zavisnost od potrebe, za različite tačke na stablu. U temenima grafa, dakle, može biti pričvršćenih i povezanih kanapa, za koje kazemo da izlaze iz temena. Tokom algoritma, u jednoj iteraciji moguća su dva slučaja: uklanjaju se trajno kanapi sa ravni briše se list i luk koji ga povezuje sa susednim temenom. Kažemo da kanap S_i dostiže tačku, x na stablu, ako $d(x, t_i) \leq S_i$.

Algoritam bi grubo imao sledeće korake.

Algoritam 4. (B.Tansel, R.Francis, T.Lowe, M.Chen: Duality and distance for the nonlinear p -center problem and covering problem on the tree network, Operations Res. 30 (1982) 725-744).

Korak 1. Izabrati proizvoljan list i proveriti da li kanapi koji iz njega izlaze mogu dostići susedno teme (ako nema nijednog kanapa u listu, luk i list se uklanjaju iz mreže).

Korak 2. Ako svi kanapi dostižu susedno teme, obrisati list i luk, a ostatak dužine kanapa iz dotičnog lista će sada izlaziti iz susednog temena.

Korak 3. U suprotnom (tj. ako najkraći kanap ne dostiže susedno teme) tada se centar određuje na kraju kanapa duž luka i svi kanapi koji mogu dostići centar se trajno uklanjaju sa slike.

Korak 4. Ako su svi kanapi uklonjeni ili ako je ostalo jedno teme, kraj. U suprotnom, preći na Korak 1.

U optimalnom rešenju se mogu izdvojiti temena iz kojih polaze kanapi u cilju dobijanja centara. Ova temena se nazivaju razdelna, i ona predstavljaju optimalno rešenje dualnog problema prekrivanja na stablu.

3. KONTINUALNI LOKACIJSKI MODELI

Teorija lokacije je jedna od oblasti primenjene i industrijske matematike i operacionih istraživanja čiji se rezultati najčešće koriste u praktičnim problemima. Generalno govoreći, problem spada u lokacijski ako je neka od promenljivih (nepoznatih) u zadatku optimizacije lokacija nekog objekta (odnosno njene koordinate u dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom prostoru). Zbog velikog broja primena, ova oblast se počela razvijati i u teorijskom pravcu. Matematički modeli lokacije najčešće se dele na *kontinualne*, *diskretne* i *mrežne*. Kod prvih se nepoznate nalaze u kontinualnom prostoru, kod diskretnih se od datog broja ponuđenih rešenja bira ono koje optimizuje neki zadati kriterijum, dok se u mrežnim optimalno rešenje nalazi ili u temenu zadatog grafa ili mreže, ili duž zadatih lukova. Dakle mrežni modeli mogu imati ili diskretna (u temenima grafa) ili kontinualna (duž lukova) rešenja. U ovoj knjizi biće reči samo o kontinualnim modelima

Matematički modeli teorije lokacije imaju za cilj da odgovore i na neka od sledećih pitanja:

- i) Koliko novih objekata treba otvoriti (postaviti)?
- ii) Gde će oni biti locirani?
- iii) Koliko veliki (tj. kog kapaciteta) će biti svaki od otvorenih objekata?
- iv) Kom novom objektu će biti pridodeljen (alociran) svaki od korisnika usluga?

Odgovori na ova pitanja naravno zavise od konkretnog problema koji se rešava. Ako treba odrediti lokacije protiv-požarnih stanica ili vozila za hitnu pomoć, tada su nove lokacije u naseljenim regionima. Ako treba odrediti lokacije deponija ili hemijskog ili nuklearnog otpada, tada izbor pada na lokacije što je moguće dalje od naselja. Koliko novih objekata i koje veličine oni treba da budu, najčešće je kompromis između cene i kvaliteta usluge: više servisa (novih objekata) poboljšavaju kvalitet usluge, ali povećavaju i cenu. Kao odgovor na iv), korisnici se najčešće alociraju svom najbližem centru, mada u nekim slučajevima takvo raspoređivanje ne mora biti optimalno.

3.1. Tipični primeri primene Dizajniranje mreže. *Gradske vlasti su suočene sa problemom dizajniranja vodovodne i kanalizacione mreže. Pri tome treba odrediti lokacije sabirnih centara (odnosno mesta gde se voda prerađuje) tako da se minimizuje ukupna dužina cevi.*

Lokacija skladišta. Neka kompanija želi da odredi lokacije svojih skladišta kako bi bila u stanju da brže i jeftinije usluži klijente. Svaka moguća lokacija skladišta karakteriše se fiksnim troškovima zakupa, transportnim troškovima po jedinici robe do korisnika i ograničenošću svojih kapaciteta.

Lokacija vatrograsnih brigada. Treba odrediti lokacije fiksnog broja vatrograsnih brigada u gradu, sa ciljem da se minimizuje maksimalno rastojanje od svake zgrade do njoj najbliže brigade.

Konkurentno lociranje objekata. Firma želi da otvori novu radnju u gradskoj četvrti gde konkurenti već imaju radnje. Zahtevi kupaca za određenom robom u toj četvrti su poznati, ali se mogu i povećati uvođenjem nove prodavnice. Cilj je da se odredi gde otvoriti radnju da bi se maksimizirao profit u uslovima konkurencije i podele tržišta.

3.2. Klasifikacija lokacijskih problema i modela. Lokacijski problemi i modeli mogu se klasifikovati na različite načine u zavisnosti od principa klasifikacije. Ako se posmatra topografija, lokacijski problemi se dele na kontinualne, diskretne i mrežne; po obliku funkcije cilja podela je na Min-Sum i Min-Max modele; lokacijski modeli mogu biti statički i dinamički, jedno-kriterijumski i više-kriterijumski, jedno-robni (single-commodity) i više-robni (multi-commodity), ne ograničenog kapaciteta novih objekata (uncapacitated) i ograničenog (capacitated), deterministički i stohastički, itd. Jednom rečju gotovo sve moguće podele modela operacionih istraživanja mogu se primeniti i na lokacijske probleme. Bilo je više pokušaja u literaturi da se izvrši stroga klasifikacija svih lokacijskih modela (videti npr. Brandeau i Chiu, 1989.), ali se ti pokušaji nisu održali jer se uvek može naći lokacijski model koji ne upada ni u jednu od unapred određenih klasa.

Mi ćemo sada izložiti nekoliko najčešćih načina podele problema lokacije, a u kasnijem izlaganju držaćemo se ovog prvog.

Kontinualni, diskretni i mrežni modeli. Jedna od osnovnih razlika između lokacijskih modela je način na koji se predstavljaju promenljive. Ako novi objekti mogu biti locirani u ravni ($\mathbf{R}^2$) ili prostoru ($\mathbf{R}^3$), govori se o *kontinualnim* modelima: polje promenljivih je kontinuum, odnosno dopustivi skup ima beskonačno mnogo tačaka. Ako je skup mogućih lokacija unapred zadat ali treba odrediti neki njegov podskup tako da se optimizira neki kriterijum, tada je definisan *diskretan* lokacijski model. *Mrežni* modeli imaju elemenata i kontinualnih i diskretnih. Polje mogućih novih lokacija je bilo gde na zadatoj mreži; na njoj je skup čvorova (temena) konačan, a skup tačaka na lukovima koji spajaju temena, beskonačan (kontinuum).

Oblik funkcije cilja. U Teoriji lokacije najčešće se razmatraju dva tipa problema: *Min-Sum* i *Min-Max*. U prvoj grupi funkcijom cilja se minimizuje težinski zbir svih rastojanja novih i fiksnih objekata. Na taj način se favorizuju "prosečni" korisnici, a zanemaruju udaljeni ili izolovani. Drugi tip funkcije cilja ravnopravno tretira sve korisnike tako što se nalaze nove lokacije koje minimizuju maksimalno rastojanje između postojećih i nepoznatih objekata. Ovi modeli se, na primer, koriste pri lokaciji TV odašiljača ili lokaciji vatrogasnih brigada, gde i udaljeni stanovnici imaju ista prava kao i oni grupisani u gradovima.

Broj novih objekata. Način na koji se mogu karakterisati lokacijski modeli je i broj objekata (servisa) koje treba otvoriti. U nekim problemima je ovaj broj unapred zadat (npr. u Veberovom i lokacijsko-alokacijskom kontinualnom problemu, u diskretnim i mrežnim zadacima *p*-težišta i *p*-centra). Ovakve modele nazivamo *endogenim*. Nasuprot njima su *egzogeni* modeli, gde je broj novih servisa nepoznata veličina i njena vrednost se dobija kao rezultat optimizacije. Kao primer egzogenih modela navešćemo "*jednostavni lokacijski (ili zemljišni) problem*" (*simple-plant location* ili *uncapacitated facility location*) i problem prekrivanja skupa.

Dalje moguće podela endogenih modela (koji će se kasnije razmatrati) su na *jednoobjektne*, *višeobjektne* i *lokacijsko-alokacijske*. Ove dve poslednje grupe modela se opet mogu podeliti u dve grupe: bez interakcije između novih objekata i sa interakcijom. Svaka od ovih klasa i podklasa modela, matematički posmatrano, imaju svoje teorijske specifičnosti, pa se zato odvojeno razmatraju.

Lokacijski problemi privatnog i javnog sektora. U privatnom sektoru, ulaganje i dobit od ulaganja se meri novčanim jedinicama. Dakle funkcija cilja može predstavljati minimizaciju troškova,

maksimizaciju profita, ili dvokriterijumski i jedno i drugo. Ovi ciljevi čine modele ovog tipa relativno jednostavnim.

U javnom sektoru, veliki broj novčanih ciljeva koji se ne izražavaju direktno novcem, također treba uvesti u model. Na primer, u lokacijama hitnih medicinskih službi, gubitak života se ne može izraziti novcem, ili odvoženje opasnih hemijskih supstanci u zabačene krajeve, ne treba meriti cenom prevoza.

3.3. Kratak istorijat. Francuski matematičar Pjer de Ferma (1601-1665) se najčešće navodi kao prvi koji je postavio jedan lokacijski problem: naći tačku trougla čiji je zbir rastojanja do temena minimalan. Tu tačku je nazvao petom značajnom tačkom trougla. Galilejev učenik, Toričeli (1608-1647) se navodi kao prvi koji je uspeo da reši zadatak konstruktivno: konstruisati jednakostranične trouglove nad svakom stranicom, sa trećim temenom sa suprotne strane od unutrašnjosti početnog trougla (Slika 2). Tražena tačka nalazi se na preseku krugova opisanih oko ovih jednakostraničnih trouglova.



Cavalieri



Torricelli

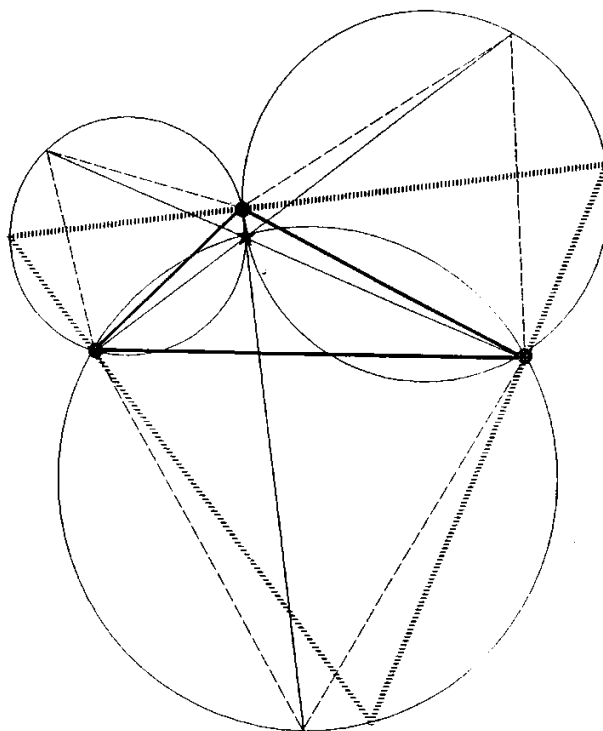


Fermat

Slika 1. Ko je prvi formulisao i rešio jedan lokacijski problem?

Batista Cavalieri (1598-1647) pokazuje da duži koje spajaju "Toričelijevu tačku" sa temenima trougla, obrazuju ugao od 120 stepeni. Sto godina kasnije (1750), engleski matematičar Tomas Simpson (1710-1761) predlaže jednostavnije konstruktivno rešenje. On takođe koristi jednakostranične trouglove kao i Toričeli, ali traženu tačku nalazi kao presek pravih dobijenih spajanjem novih temena jednakostraničnih trouglova i datih temena sa suprotne strane (Slika 2). Ove prave su kasnije nazvane "Simpsonove prave" (tj. prave $a_1a'_1, a_2a'_2$ i $a_3a'_3$ na slici 2). U obadve navedene konstruktivne metode pretpostavlja se da su svi unutrašnji uglovi trougla manji od 120 stepeni. Ako to nije slučaj, onda je Toričelijeva tačka u temenu tupog ugla. U istom radu Simpson, kao zadatak za vežbu, navodi uopštenje na težinsku verziju problema: svakoj tački trougla pridodeljena je težina (neki realan broj); naći tačku takvu da je zbir težinskih rastojanja od nje do tačaka trougla minimalan.

Na slici 2 je konstruisan i trougao $b_1b_2b_3$ opisan oko trougla određenog sa tri date tačke. On je zapravo rešenje sledećeg problema (prvi put formulisanog 1810. godine u "Annals de Mathematiques Pures et Appliquées", Vol I, str. 384): *naći najveći jednakokranični trougao opisan oko datog trougla*. U sledećem volumenu istog časopisa (1811) dato je i rešenje: stranice traženog trougla normalne su na prave $a_1a'_1, a_2a'_2$ i $a_3a'_3$ (tj. na Simpsonove prave). Kako je kasnije primetio Kuhn (1976) ovaj zadatak je verzija duala problema koji je postavio Ferma: ako je poznata Toričelijeva tačka (primal), tada je lako konstruisati najveći opisan jednakokranični trougao (dual) i obrnuto. Inače, ideja dualnosti je jedna od fundamentalnih u metodama optimizacije: svaki optimizacioni zadatak ima svog parnjaka (dual) baziran na suprotnostima (ili je neka vrsta dopune do celine). Dual (parnjak) minimizacije je maksimizacija; relaciji $\leq$ parnjak je $\geq$, itd. U našem slučaju Toričelijeva tačka je rezultat minimizacije, pa je dual rezultat maksimizacije površine opisanog jednakokraničnog trougla.



Slika 2. Konstruktivna rešenja nalaženja pete značajne tačke trougla
(- fiksne tačke, * - Toričelijeva tačka)

U 20. veku, austrijski ekonomista Veber (1909) predlaže težinski model sa tri tačke u problemu nalaženja lokacije fabrike, a sa ciljem minimizacije transportnih troškova od fabrike do tri grupe snabdevača sirovinama. Matematički deo knjige u Dodatku napisao je Georg Pick, koji je naveo i geometrijsko rešenje problema. Interesantno je da je uopštena težinska verzija problema na m fiksnih tačaka kasnije vezana za Veberovo ime, iako on nije prvi ni predložio model, niti ga je prvi rešio. On je prvi našao primenu modela u industriji (o daljim istorijskim detaljima, videti npr. Wesolowski, 1993).

Pomenimo ovde jedan sličan problem za koji se u literaturi ustalio naziv "Štajnerov problem" (Jacob Steiner, 1796-1863): a koji se najčešće ne uvrštava u lokacijske: *naći mrežu minimalne dužine, tako da sve date tačke pripadaju mreži*. Za tri date tačke, Štajnerov i Veberov (tj. Fermaov) problem imaju isto rešenje. Interesantno je Kuhn-ovo (1967) zapažanje po kome je Štajner potpuno "nevin" u Štajnerovom problemu: on ga nije ni postavio, ni rešio ni praktično primenio. Njegova zasluga je u bezuspešnim pokušajima da problem reši. Ipak, Kurant i Robbins (Courant i Robbins, 1941) greškom problem nazivaju Štajnerovim, a kasnije se taj naziv ustalio i nije bilo lako nazvati ga drugačije bez opasnosti od konfuzije.

LOKACIJA JEDNOG OBJEKTA (VEBEROV PROBLEM)

Kao što je već rečeno, u kontinualnom lokacijskom zadatku polje mogućih novih lokacija (koordinata traženih tačaka) je kontinuum: treba izabrati tačke u ravni (ili prostoru) kojom se dostiže minimum ili maksimum nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno.

Veberov problem se može formulisati na sledeći način: dato je m tačaka u ravni $a_1, a_2, \dots, a_m$ i m skalara (težina) pridodeljenih svakoj tački ($w_1, w_2, \dots, w_m$). Naći tačku x za koju je suma težinskih rastojanja do datih tačaka minimalna.

Ako na primer $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$, predstavljaju koordinate zgrada u nekom naselju u kome treba podici novu robnu kuću sa nepoznatim koordinatama $x = (x_1, x_2)$, tada težinski koeficijenti koji se mogu pridodeliti zgradi, mogu predstavljati broj njenih stanovnika. Funkcijom cilja se minimizuje težinski zbir rastojanja (ili cena prevoza) do nove robne kuće. Matematički model ovog problema je

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot d(x, a_i), \quad (1)$$

gde su

$x = (x_1, x_2)$ - koordinate nepoznate lokacije;

m - broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,

$d(x, a_i)$ - rastojanje i -tog korisnika do nepoznate lokacije,

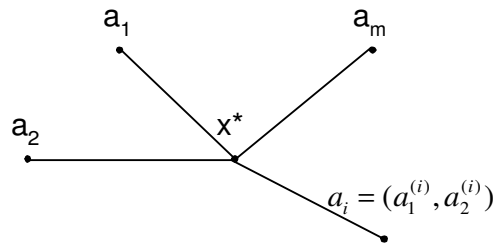
n_i - broj elemenata i -tog korisnika,

r_i - jedinična cena prevoza i -tog korisnika,

$w_i = n_i r_i$ - težinski koeficijenti pridodeljeni i -tom korisniku,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate (lokacije) i -tog korisnika,

f_w - funkcija cilja Veberovog problema.



Slika 3. Veberov problem s Euklidovom merom rastojanja

Ovaj model je model nelinearnog programiranja, bez prisustva skupa ograničenja, odnosno (1) je zadatak bezuslovne minimizacije po x , jer je funkcija rastojanja $d(x, a_i)$ nelinearna. Poznato je da se $d(x, a_i)$ može predstaviti na više načina, što je uslovljeno konkretnim problemom koji se rešava u praksi. Sada će se izložiti osobine Veberovog problema za različite načine merenja rastojanja.

2.1. Euklidova metrika. Ako x i z pripadaju $\mathbf{R}^n$, tada je njihovo Euklidovo rastojanje određeno sa

$$d(x, z) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2} = \|x - z\|_2,$$

gde $\|\cdot\|_2$ predstavlja Euklidovu normu. Funkcija cilja (1) sada ima oblik

$$(2) \quad (\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i d(x, a_i) = \sum_{i=1}^m w_i \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_j^{(i)})^2 \right)^{1/2}.$$

U nelinearnom programiranju (NP) osnovno je pitanje da li je konkretan problem konveksan ili ne, iz razloga što se konveksni problemi daleko lakše rešavaju. Sledeći stav govori da je funkcija cilja Veberovog problema konveksna. U daljem tekstu ograničićemo se na slučaj $n = 2$, iako većina stavova koji će biti navedeni važe i u opštem slučaju, tj. za svako $n \geq 2$.

Stav 1. Ako su $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ niz datih tačaka u $\mathbf{R}^2$ dužine m , tada je f_w definisana sa (2), konveksna funkcija.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $d(x, a_i)$ konveksna za svako i , jer je linearna kombinacija konveksnih funkcija konveksna, tj. dokazaćemo da je konveksna sledeća funkcija

$$(3) \quad g(x) = d(x, z) = \left((x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \right)^{1/2},$$

odnosno, pokažimo da važi:

$$(4) \quad g((1-\lambda)x' + \lambda x'') \leq (1-\lambda)g(x') + \lambda g(x'')$$

za svako $\lambda \in [0,1]$ i $x', x'' \in \mathbf{R}^2$. Koristićemo poznatu tzv. nejednakost trougla,

$$d(p+q, z) \leq d(p, z) + d(q, z),$$

gde su $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ tačke u ravni. Ova nejednakost važi za svaku funkciju rastojanja (metriku), pa i za Euklidovu. Ona zapravo tvrdi da stranica trougla ne može biti veća od zbira druge dve stranice. Traženo tvrđenje konveksnosti se dobija zamenom vektora p i q u nejednakost trougla na sledeći način:

$$\begin{aligned} p &= (1-\lambda)x', \quad q = \lambda x'' \text{ tj.} \\ g((1-\lambda)x' + \lambda x'') &= d((1-\lambda)x' + \lambda x'', z) = d(p+q, z) \leq \\ &\leq d(p, z) + d(q, z) = d((1-\lambda)x', z) + d(\lambda x'', z) = \\ &= (1-\lambda)d(x', z) + \lambda d(x'', z) = (1-\lambda)g(x') + \lambda g(x'') \end{aligned}$$

■

Stavom 1. dokazano je da (2) predstavlja zadatak (bezuslovnog) nelinearnog konveksnog programiranja, u kome se za uslove prvog reda nalazi gradijent

$$\nabla f_w(x) = \left(\frac{\partial f_w}{\partial x_1}, \frac{\partial f_w}{\partial x_2} \right)$$

gde je

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^{(i)})}{d(x, a_i)}, \quad j = 1, 2.$$

Očigledno su parcijalni izvodi prekidne funkcije pa $f_w(x)$ nije glatka. Tačke prekida su postojeće lokacije, tj. za $x = a_i$, jer je $d(a_i, a_i) = 0$. Sledeći stav određuje uslove pod kojima je optimalno rešenje u nekoj od fiksnih tačaka. On prestavlja uopštenje tvrđenja izloženo ranije, a koje se odnosi na tri tačke: kod trougla sa jednim uglom $\geq 120^\circ$, Veberova tačka se nalazi u temenu tupog ugla.

Stav 2. Funkcija $f_w(x)$ dostiže minimum u jednoj od fiksnih tačaka

$$a_r = (a_1^{(r)}, a_2^{(r)}), \quad r \in \{1, \dots, m\}$$

ako i samo ako važi

$$c_r = \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (a_1^{(r)} - a_1^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (a_2^{(r)} - a_2^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq w_r$$

Dokaz. Ideja dokaza je da se pokaže da je razlika desne i leve strane gornje nejednakosti zapravo minimalna vrednost izvoda po pravcu funkcije f_w u tački a_r . Ako je ta minimalna vrednost ne

negativna (dovoljan uslov), sledi da je f_w rastuća po svim pravcima iz a_r , odnosno da je a_r minimum. Obrnuto, ako je a_r minimum (potreban uslov), tada je i izvod po svakom pravcu iz tačke a_r (pa i po minimalnom) ne negativan.

Obeležimo nejednakost iz ovog stava sa $R_1^2 + R_2^2 \leq w_r^2$, i posmatrajmo $f_w(a_r + tb)$, gde je $b = (b_1, b_2)$ jedinični vektor ($b_1^2 + b_2^2 = 1$):

$$f_w(a_r + tb) = \sum_{i=1}^m w_i d(a_r + tb, a_i).$$

Lako se može pokazati da je izvod po pravcu određenom sa vektorom b u tački a_r jednak

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{df_w}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} w_r + b_1 R_1(t) + b_2 R_2(t) = w_r + b_1 R_1 + b_2 R_2$$

Sada ćemo pokazati da je minimalni izvod po pravcu jednak $w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$, što je zapravo razlika desne i leve strane nejednakosti iz ovog stava.

$$\min_{(b_1, b_2)} (w_r + b_1 R_1 + b_2 R_2) = \min_{b_1} (w_r + b_1 R_1 + R_2 \sqrt{1 - b_1^2})$$

Nalaženjem minimuma (po jednoj nepoznatoj) i korišćenjem uslova $b_1^2 + b_2^2 = 1$, dobijamo rešenje

$$b_1^* = -\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}; \quad b_2^* = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Zamenom dobijenih vrednosti za b_1^* i b_2^* u formulu za izvod po pravcu, dobija se

$$w_r + b_1^* R_1 + b_2^* R_2 = w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Ako je a_r minimum funkcije $f_w(x)$, tada je f_w rastuća po svakom pravcu iz a_r , tj. njen minimalan izvod po pravcu, $w_r - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$, mora biti nenegativan. Očigledno važi i obrnuto. ■

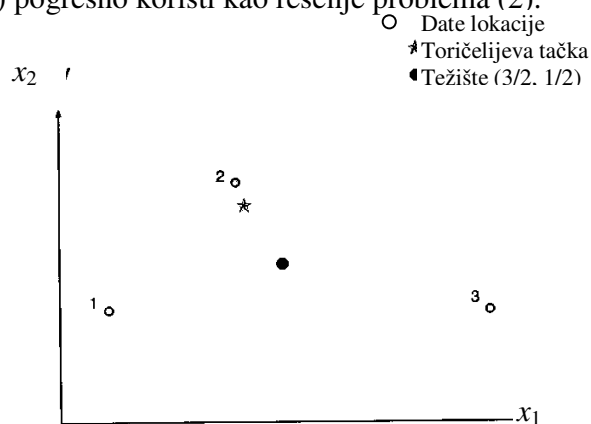
Pre nego što pređemo na metode rešavanja Veberovog zadatka, navešćemo drugi lokacijski model čije se rešenje može dobiti u analitičkom obliku. To je problem nalaženja težišta ili centroida, gde se umesto $d(x, a_i)$, razmatra $d^2(x, a_i)$,

$$f_c(x) = \sum_{i=1}^m w_i d^2(x, a_i) \tag{6}$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda funkcije $f_c(x)$ sa nulom, dobija se rešenje koje se naziva težište ili centroid:

$$x_j^c = \frac{\sum_{i=1}^m a_j^{(i)}}{\sum_{i=1}^m w_i}, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Primetimo da za $w_i = 1$ rešenje (7) predstavlja aritmetičku sredinu koordinata datih tačaka. Mada se Veberova tačka i centroid mogu dosta razlikovati (videti Sliku 4), u praksi se često rešenje dato sa (7) pogrešno koristi kao rešenje problema (2).



Slika 4. Zadatim tačkama $a_1(0,0)$, $a_2(1,1)$ i $a_3(3,0)$, tačka težišta i Toričelijeva tačka su različite.

2.2. Metode rešavanja problema sa Euklidovom merom rastojanja. Kako je $f_w(x)$

konveksna (stav 1) to se u rešavanju može koristiti bilo koja metoda bezuslovne minimizacije koja ne zahteva glatkost. Na žalost, u ovom slučaju konvergencija klasičnih metoda je veoma spora, u slučajevima kada je optimalna lokacija u nekoj od fiksnih tačaka. Iz tog razloga se prvo proveriti da li je to slučaj (stav 2), pa ako nije, primeni se neka metoda bezuslovne minimizacije. Čak šta više, $f_w(x)$ se može jednostavno transformisati u glatku funkciju korišćenjem tzv. hiperbolijske aproksimacije:

$$d^H(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon},$$

gde je ε proizvoljan mali broj (Wesolowski i Love, 1972).

U slučaju hiperbolijske aproksimacije, dodatni problem je numerička nestabilnost: vrednost funkcije cilja reformulisanog problema može biti veoma blizu vrednosti originalnog zadatka, dok se njihova rešenja (koordinate) mogu značajno razlikovati.

Drugi popularniji način nalaženja rešenja Veberovog problema je u numeričkom rešavanju sistema nelinearnih jednačina

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^i)}{d(x, a_i)} = 0, \quad j = 1, 2$$

Iterativnu metodu za nalaženje rešenja sistema (8), prvi je predložio Endre Weiszfeld, 1937. godine (uzgred, njegovo pravo ime na poljskom je Andrew Vazonyi), ali je njena konvergencija dokazana tek šezdesetih godina (Kuhn i Kienne, 1962).

Ako se sistem (8) razloži, kao

$$x_j \cdot \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d(x, a_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{w_i a_j^{(i)}}{d(x, a_i)}, \quad j = 1, 2$$

i kada se x_j , $j = 1, 2$ eksplicitno izrazi, dobija se

$$(9) \quad x_j = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{a_j^{(i)} \cdot w_i}{d(x, a_i)}}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d(x, a_i)}}, \quad j = 1, 2,$$

u kome su nepoznate x_1 i x_2 na obe strane jednakosti.

Ovaj ekvivalentni oblik predstavljanja uslova prvog reda (8), može se iskoristiti za uspostavljanje iterativne procedure, što je čest slučaj u numeričkoj analizi (npr. Gaus-Zajdelova metoda rešavanja sistema linearnih jednačina). Naime, zada se proizvoljno (početno) rešenje (x_1, x_2) , izračuna se desna strana jednakosti (9), za date x_1 i x_2 , što predstavlja nove vrednosti za x_j korišćenjem (9). Sada se te nove vrednosti ubace na desnu stranu, itd. Ovaj iterativni postupak se ponavlja sve dok dve uzastopne tačke nisu proizvoljno bliske. Kao početno rešenje najčešće se uzima tačka centroida $x_j^{(c)}$ definisana sa (7).

Obeležimo sa $\varphi(x_j)$ desnu stranu jednakosti (9). Vajsfeldova metoda se onda može predstaviti kao

$$x_j^{(k)} = \varphi(x_j^{(k-1)}), \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots$$

gde je k broj iteracija. Na dokazu konvergencije se nećemo zadržavati (videti na primer Brimberg). U vektorskom obliku, Vajsfeldov iteracioni postupak ima sledeći oblik:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \nabla f(x^{(k-1)}) / \left(\sum_{i=1}^m w_i / d_i(x^{(k-1)}, a_i) \right),$$

gde je gradijent dat sa

$$\nabla f(x^{(k-1)}) = \sum_{i=1}^m w_i (x^{(k-1)} - a_i) / d(x^{(k-1)} - a_i).$$

Na Slici 5 dat je listing programa u Fortran-u za rešavanje Veberovog problema Vajsfeldovom iterativnom metodom. Kriterijum zaustavljanja je predstavljen s dva parametra: *iter* – maksimalan broj iteracija; *tol* – bliskost kvadrata rastojanja dva uzastopna rešenja.

```

*~~~~~
subroutine WEBER (n,x,y,w,xo,yo,fun)
real*8    xo,tol,yo,sw,xt,yt,fx,fy,fxx,fun
real*8    x(500),y(500),w(500),d(500)
* ----- Parametri
iter=100
tol=1.d-5
* ----- Pocetno resenje (xo,yo) - centroid
xo=0.0d0
yo=0.0d0
sw=0.0d0
do j=1,n
    xo=xo+w(j)*x(j)
    yo=yo+w(j)*y(j)
    sw=sw+w(j)
enddo
xo=xo/sw
yo=yo/sw
sw=1.d20
it=0
* ----- Iteracije
do while (it.lt.iter.and.sw.gt.tol)
    it=it+1
    fx=0.d0
    fy=0.d0
    fxx=0.d0
    fyy=0.d0
    do j=1,n
        d(j)=DSQRT((xo-x(j))*(xo-x(j))+(yo-y(j))*(yo-y(j)))
        fx=fx+w(j)*x(j)/d(j)
        fxx=fxx+w(j)/d(j)
        fy=fy+w(j)*y(j)/d(j)
    enddo
    xt=fx/fxx
    yt=fy/fxx
    sw=(xt-xo)*(xt-xo)+(yt-yo)*(yt-yo)
    xo=xt
    yo=yt
enddo
* ----- Funkcija cilja 'fun'
fun=0.
do j=1,n
    fun=fun+d(j)*w(j)
enddo
return
end

```

Slika 5. Fortranski kod za Vajsfeldovu metodu rešavanja Veberovog zadatka.

2.3. Pravougaono rastojanje. U gradskim uslovima, direktno rastojanje između novih i postojećih tačaka određeno Euklidovom metrikom, često je nerealno. Vozila se kreću po ulicama, koje se obično seku pod pravim uglom. Iz tog razloga se u Teoriji lokacije razmatraju i modeli sa pravougaonom (l_1) metrikom.

Ako u (1) rastojanje određujemo sa

$$d_i(x) = \sum_{j=1}^n |x_j - a_j^{(i)}|, \quad i = 1, \dots, m,$$

odnosno za problem lokacije u ravni ($n = 2$)

$$d_i(x) = d_i(x, a_i) = |x_1 - a_1^{(i)}| + |x_2 - a_2^{(i)}|, \quad i = 1, \dots, m$$

tada funkcija cilja ima oblik

$$\begin{aligned} f_w(x) &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot (|x_1 - a_1^{(i)}| + |x_2 - a_2^{(i)}|) = \\ (11) \quad &= \sum_{i=1}^m w_i |x_1 - a_1^{(i)}| + \sum_{i=1}^m w_i |x_2 - a_2^{(i)}| = \\ &= f_{w1}(x) + f_{w2}(x) \end{aligned}$$

pa se problem svodi na dve minimizacije po jednoj promenljivoj, odnosno problem je separabilan. Sledeći stav govori o konveksnosti.

Stav 3. Funkcija $f(x) = w|x - a|$ je konveksna, za svako $w > 0$ i $a \in \mathbf{R}$.

Dokaz ovog elementarnog stava prepuštamo čitaocu (koristiti nejednakost trougla i definiciju konveksne funkcije)

Kako je zbir konveksnih funkcija konveksna funkcija, to su i $f_{w_1}(x)$, $f_{w_2}(x)$ i $f_w(x)$ konveksne. Zbog separabilnosti $f_w(x)$, a u cilju nalaženja rešenja problema (11), preformulisaćemo i razložiti problem (11) na nalaženje minimuma po jednoj promenljivoj kao

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^p t_i |x - a^{(i)}|, \quad (12)$$

gde je $p \leq m$, $t_i \geq w_l$ ($i = 1, \dots, p$; $l = 1, \dots, m$), $x \in R$, $a^{(i)} \in R$ i

$$a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq \dots \leq a^{(p)}.$$

Razlog što je $p \leq m$ i $t_i \geq w_i$ izložićemo na malom primeru. Pretpostavimo da je $a^{(3)} = a^{(4)} = 3$ i da je $w_3 = 3$ i $w_4 = 7$. Sumiranjem $w_3 |x - a^{(3)}| + w_4 |x - a^{(4)}| = 3|x - 3| + 7|x - 3|$ dobijamo član $t_3 |x - a^{(3)}| = 10|x - 3|$. Dakle, broj sabiraka (u slučaju kada dve date tačke imaju neku istu koordinatu) je smanjen za jedan ($p = m - 1$), a nova težina t_3 je dobijena kao zbir $w_3 + w_4 = 3 + 7 = 10$. Izvod funkcije (12) ima oblik

$$(13) \quad f'(x) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^p t_j, & x < a^{(1)} \\ \sum_{j=1}^i t_j - \sum_{j=i+1}^p t_j, & a^{(i)} < x \leq a^{(i+1)} \\ \sum_{j=1}^p t_j, & x > a^{(p)} \end{cases}$$

Dakle, $f(x)$ je deo po deo linearna i konveksna.

Sledeći stav daje uslove za nalaženje minimuma funkcije (12), odnosno uslove za nalaženje indeksa i^* za koji je $x^* = a^{(i^*)}$.

Stav 4. Pri rešavanju zadatka (12)-(13) obeležimo sa i^* indeks za koji važi

$$(14) \quad s_1 = \sum_{j=1}^{i-1} t_j < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p t_j \leq \sum_{j=1}^i t_j = s_2.$$

Ako je ispunjena stroga nejednakost u (14), tada je $x^* = a^{(i)}$, a ako u (14) važi jednakost, tada $x^* \in [a^{(i)}, a^{(i+1)}]$.

Dokaz. Koefficient pravca u (13) očigledno raste sa rastom indeksa i , pa za neko i^* (gde izvod menja znak pa i $f(x)$ dostiže minimum) važi

$$\sum_{j=1}^{i^*-1} t_j - \sum_{j=i^*}^p t_j < 0, \quad \sum_{j=1}^{i^*} t_j - \sum_{j=i^*+1}^p t_j \geq 0.$$

Ove dve nejednakosti se lako mogu svesti na izraz (14). ■

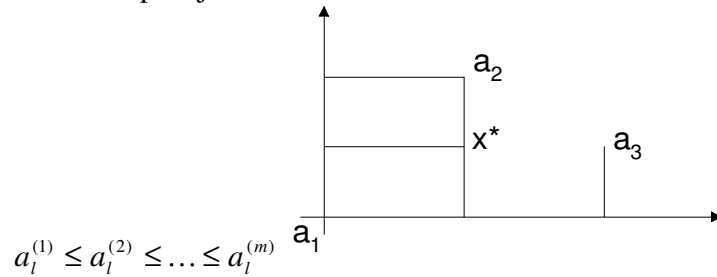
Poslednji stav omogućava formiranje jednostavne procedure nalaženja rešenja zadatka (11).

Algoritam 2.

Za svaku koordinatu $l = 1, 2$, ponoviti sledeće korake:

Korak 1. Inicijalno je $p = m$ i $t_i = w_i$, $i = 1, \dots, m$.

Korak 2. Urediti koordinate u neopadajući niz



Slika 6. Primer za Veberov problem sa pravougaonim rastojanjem

Korak 3. Redukovati problem u slučaju da su neke koordinate jednake: novi niz će imati p različitih elemenata sa težinama t_i , $i = 1, \dots, p$.

Korak 4. Izračunati $s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p t_i$

Korak 5. $i := 1$

Korak 6. Naći s_1 i s_2 kao u (14).

Korak 7. Ako je $s_1 < s < s_2$, nađeno je rešenje za l -tu koordinatu kao $x_l^* = a_l^{(i)}$; ako je $s_1 < s = s_2$, tada je $x_l^* = [a_l^{(i)}, a_l^{(i+1)}]$; u suprotnom $i = i + 1$ i preći na korak 6.

Primer 1. Koordinate fiksnih tačaka su $a_1(0,0)$, $a_2(1,2)$ i $a_3(2,1)$ (Slika 6), a težine $w_i = 1$. Naći Veberovu tačku za pravougaono rastojanje.

Rešenje. Problem se svodi na nalaženje minimuma sledeće dve deo po deo linearne funkcije

$$(\min) f_1(x) = |x_1| + |x_1 - 1| + |x_1 - 2|$$

$$(\min) f_2(x) = |x_2| + |x_2 - 2| + |x_2 - 1|.$$

Kako je $f_1(x) \equiv f_2(x)$, to ćemo izložiti korake algoritma samo za $f_1(x)$. Sa Slike 7 je jasno da je $x^* = (1,1)$. Proverićemo i da li ćemo dobiti rešenje $x_1^* = 1$ primenom gornjeg algoritma.

Korak 1. $p = 3, t_1 = t_2 = t_3 = 1$

Korak 2. $a_1^{(1)} \leq a_1^{(2)} \leq a_1^{(3)} \Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 2$

Korak 3. Nema redukcije jer su sve koordinate različite.

Korak 4. $s = 3/2$

Korak 5. $i = 1$

Korak 6. $s_1 = 0, s_2 = t_1 = 1$

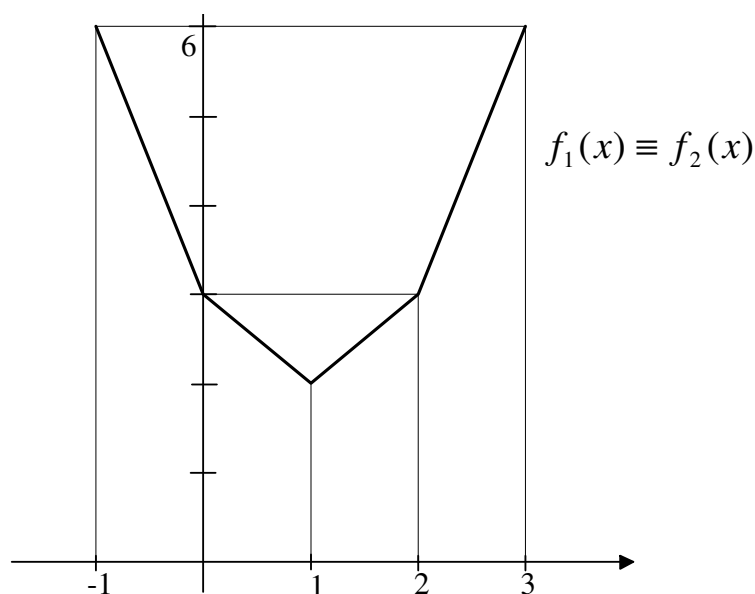
Korak 7. $0 < \frac{3}{2} < 1$ - nije; $i = 2$ (druga iteracija)

Korak 6. $s_1 = t_1 = 1, s_2 = t_1 + t_2 = 2$

Korak 7. $1 < \frac{3}{2} < 2$ - jeste $\Rightarrow i^* = 2 \Rightarrow x_1^* = a_1^{(2)} = 1$; Kraj.

l_p rastojanje. Pretpostavimo da se rastojanje u Veberovom lokacijskom problemu određuje sa l_p funkcijom, tj.

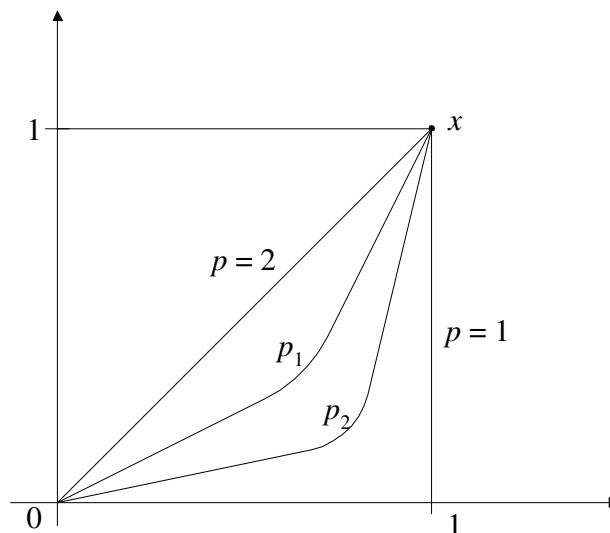
$$(15) \quad d_p(x, a_i) = d_i(x) = \left(|x_1 - a_1^{(i)}|^p + |x_2 - a_2^{(i)}|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, p \in \mathbf{R}$$



Slika 7.

U nekim realnim problemima bolje je pretpostaviti da $p \in (1,2)$ nego da je $p = 1$ ili $p = 2$. Na primer, na američkim autostradama, ustanovljeno je da je najbolja metrika za $p = 1.41$.

Pravougaono i linijsko (Euklidovo) rastojanje su očigledno specijalni slučajevi l_p rastojanja, odnosno za $p = 1$ ili $p = 2$, dobijaju se odgovarajuće formule za ove funkcije rastojanja. Na Slici 6 data je l_p funkcija od tačke (0,0) do (1,1) u $\mathbf{R}^2$, za različite vrednosti $p \in [1,2]$.



Slika 8. l_p - rastojanje ($p_1 > p_2$)

Funkcija rastojanja od koordinatnog početka do bilo koje tačke u posmatranom prostoru naziva se norma, tj. $d_p(0, x) = \|x\|_p$. Na Slici 8 date su dakle norme za $x = (1,1)$ i različite vrednosti parametara p : $d_2((0,0), (1,1)) = \|(1,1)\|_2 = \sqrt{2}$; $d_1((0,0), (1,1)) = \|(1,1)\|_1 = 2$. Primetimo da je $d_{p_1}(0, x) < d_{p_2}(0, x)$, ako je $p_1 > p_2$.

Lako se može proveriti i da za $p \rightarrow \infty$, $d_p(x, a_i)$ postaje $\max\{|x_1 - a_1^{(i)}|, |x_2 - a_2^{(i)}|\}$. Ova funkcija rastojanja (l_∞) se zove Čebiševljeva funkcija. U gornjem primeru je $d_\infty((0,0), (1,1)) = \|(1,1)\|_\infty = 1$.

Sledećim stavom se dokazuje da Veberov problem sa l_p rastojanjem spada u klasu konveksnih programa.

Stav 5. Funkcija

$$(16) \quad f_w(x) = \sum_{i=1}^m w_i d_p(x, a_i), \quad p \geq 1$$

je konvekso, gde je $d_p(x, a_i)$ definisano sa (15).

Dokaz. Kako je zbir konveksnih funkcija, konveksna, dovoljno je dokazati (kao u dokazu stava 2.1) da je $d_p(x, a_i)$ konveksna. U dokazu će se, pored nejednakosti trougla, koristiti i poznata nejednakost Minkovskog

$$\left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k + \beta_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^p \right)^{1/p},$$

gde je $p \geq 1$, a α_k i β_k realni brojevi.

Obeležimo sa $y' = x' - a_i$ i $y'' = x'' - a_i$, gde su $x' = (x'_1, x'_2)$ i $x'' = (x''_1, x''_2)$.

$$\begin{aligned} d_p(\lambda y'_1 + (1-\lambda)y''_1, \lambda y'_2 + (1-\lambda)y''_2) &\leq && \text{(nejednakost trougla)} \\ &\leq \left[(|\lambda y'_1| + |(1-\lambda)y''_1|)^p + (|\lambda y'_2| + |(1-\lambda)y''_2|)^p \right]^{1/p} \leq && \text{(nejednakost Minkovskog)} \\ &\leq (|\lambda y'_1|^p + |\lambda y'_2|^p)^{1/p} + ((1-\lambda)|y''_1|^p + (1-\lambda)|y''_2|^p)^{1/p} = \\ &= \lambda(|y'_1|^p + |y'_2|^p)^{1/p} + (1-\lambda)(|y''_1|^p + |y''_2|^p)^{1/p} = \\ &= \lambda d_p(y'_1, y'_2) + (1-\lambda)d_p(y''_1, y''_2). \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Analogno Stav 2, daćemo potreban i dovoljan uslov da optimalna lokacija bude u fiksnoj tački a_r .

Stav 6. $f_w(x)$ dostiže minimum u fiksnoj tački $a_r(a_1, a_2)$ ako i samo ako važi

$$(17) \quad \left(|R_1|^{\frac{p}{p-1}} + |R_2|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq w_r, \text{ za } p > 1$$

$$(18) \quad \max\{|R_1|, |R_2|\} \leq w_r, \text{ za } p = 1$$

gde je

$$R_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{w_i \cdot \text{sign}(a_k - a_k^{(i)}) |a_k - a_k^{(i)}|^{p-1}}{(l_p(a_r, a_i))^{p-1}}, \quad k=1,2$$

Dokaz. Primetimo da je R_k jednako parcijalnom izvodu funkcije (16) u tački $x = a_r$. Dokaz zatim sledi analogno dokazu Stava 2. Leva strana nejednakosti (17) nije definisana za $p=1$. Uvođenjem smene $p = p/(p-1)$ i traženjem limesa (17) pri $p' \rightarrow \infty$, dobijamo traženo tvrđenje (18) (za $p=1$). $\blacklozenge$

Kako $f(x)$ očigledno nije glatka, to se umesto $d_i(x)$ uvodi $\bar{d}_i(x)$ kao

$$(19) \quad \bar{d}_i(x) = \left\{ \left[(x_1 - a_1^{(i)})^2 + \varepsilon \right]^{p/2} + \left[(x_2 - a_2^{(i)})^2 + \varepsilon \right]^{p/2} \right\}^{1/p}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nova funkcija cilja $\bar{f}(x) = \sum t_i \bar{d}_i(x)$ - je glatka za svako x . Ova tzv. hiperbolička aproksimacija se uvodi i iz razloga što je $\bar{f}(x)$ takođe strogo konveksna, pa se na njoj mogu primeniti metode NP prvog reda.

Stav 7. Funkcija $f(x)$ je strogo konveksna.

Dokaz. Da bi se dokazala stroga konveksnost funkcije $\bar{d}_i(x)$, dovoljno je dokazati da je njena Hesijan matrica pozitivno definitna (svi glavni minori veći od nule), što prepuštamo čitaocu. ♦

Prirodno pitanje je, koliko su rešenja problema sa funkcijom rastojanja (15) i (19) bliska, odnosno koliko je dobra hiperbolijska aproksimacija l_p rastojanja u rešavanju Veberpvog problema? Odgovor daje sledeći stav.

Stav 8. $\max\{\bar{f}_p(x) - f_p(x)\} \leq 2^{1/p} \cdot \epsilon^{1/2} \cdot \sum_{i=1}^m w_i$.

Dokaz. Dokažimo prvo nejednakost $\bar{f}_p(x) - f_p(x) \leq 2^{1/p} \cdot \epsilon^{1/2}$ korišćenjem nejednakosti Minkovskog. Uvedimo smene $y_1 = |x_1 - a_1^{(i)}|$; $y_2 = |x_2 - a_2^{(i)}|$; $y_3 = \epsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned} \bar{d}_i(x) &= \left[(y_1^2 + y_3^2)^{p/2} + (y_2^2 + y_3^2)^{p/2} \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \left[((y_1 + y_3)^2)^{p/2} + ((y_2 + y_3)^2)^{p/2} \right]^{1/p} = \\ &= \left[|y_1 + y_3|^p + |y_2 + y_3|^p \right]^{1/p} \leq (\text{nejednakost Minkovskog}) \\ &\leq \left[|y_1|^p + |y_2|^p \right]^{1/p} + \left[|y_3|^p + |y_3|^p \right]^{1/p} = \\ &= d_i(x) + 2^{1/p} \cdot \epsilon^{1/2} \end{aligned}$$

Skalarnim množenjem sa $w = (w_1, \dots, w_m)$ leve i desne strane gornje nejednakosti, dobija se traženo tvrđenje. ♦

Iz prethodnog stava je jasno da su rešenja hiperboličke aproksimacije i odgovarajućeg Veberovog problema, proizvoljno bliske. Potrebno je izabrati mali broj ϵ i zadatak rešiti bilo kojom varijantom gradijentne metode NP. Pa ipak, i na $\bar{f}(x)$ se najčešće primenjuje Vajsfeldova metoda. Ostavićemo čitaocu da posle izjednačavanja parcijalnih izvoda $\bar{f}(x)$ sa nulom, nađe Vajsfeldovu iterativnu formulu u kojoj se za $p = 2$ i $\epsilon = 0$ dobija jednačina (9).

LOKACIJA JEDNOG OBJEKTA - PROŠIRENI MODELI

U ovom odeljku navešćemo samo neka od velikog broja mogućih proširivanja osnovnog modela kontinualne lokacije jednog objekta. Pri tome se, zbog ograničenosti prostora nećemo upuštati u teorijske detalje, već ćemo ukratko navesti procedure kojima se prošireni model svodi na osnovni.

3.1. Lokacijska ograničenja. Ako postoje neke lokacije u kojima se ne može graditi novi objekt, bilo zbog reljefa (jezera, planine i sl.), ljudskog faktora itd., tada govorimo o lokacijskim ograničenjima. Skup dopustivih lokacija obeležimo sa $\mathbf{D}$.

Tada prošireni model ima oblik

$$\min f(x) = \sum w_i d(x, a_i)$$

Izložićemo jedan za rešavanje ovog zadatka.

Korak 1. Naći bezuslovni minimum zadatka (1) i obeležiti ga sa x ;

Korak 2. Proveriti da li je tačka x – dopustiva, ako jeste, kraj;

Korak 3. Uvodi se koncept vidljivosti, tj. nalazi se podskup dopustivog skupa koji je vidljiv iz x .

Korak 4. x^* je najbliža sa x a pripada podskupu određenom u Koraku 3 (tj. x^* je najbliža dopustiva, a vidljiva iz x).

Stroža definicija vidljivosti je: x^* je vidljiva iz tačke x ako i samo ako ne postoji y na duži koja spaja x i x^* , takvo da $y \notin \mathbf{D}$. Za slučaj da je $\mathbf{D}$ poligon (ili unija konveksnih poligona), Hansen, Peeters. Thisse (79) predlažu efektivnu metodu, na kojoj se nećemo zadržavati.

3.2. Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja. Iako je $f(x)$ nelinearna funkcija, u (1) je zavisnost funkcije, od rastojanja linearna. Drugim rečima, ako obeležimo sa $y_i = d_i(x)$, tada je (1) linearna funkcija po y ,

$$f(y) = \sum_{i=1}^m w_i y_i .$$

Navesćemo neke primere u kojima je bolje pretpostaviti nelinearnost funkcije $f(y)$, tj. neka je $C_i[d_i(x)] \neq w_i d_i(x)$ i $f(x) = \sum C_i[d_i(x)]$.

Primer 2. Često realna situacija nalaže i uvođenje u model fiksnih troškova transporta k_i iz datih tačaka a_i , tj.

$$C_i[d_i(x)] = \begin{cases} k_i + w_i d_i(x), & x \neq a_i, i = 1, \dots, m \\ 0, & x = a_i \end{cases}$$

Algoritam 4.

Korak 1: rešiti $\sum_{i=1}^m (k_i + w_i d_i(x))$ (sa ili bez lokacijskih ograničenja) Vajsfeldovom metodom;

Korak 2: uporediti x sa $a_i, i = 1, \dots, m$ i naći najmanju vrednost, tj.

$$x^* = \arg \min \{f(x^*), f(a_1), \dots, f(a_m)\}.$$

Primer 3. Eksperimentalno je utvrđeno da minimalno vreme dolaska hitnih službi opada sa povećanjem rastojanja i da je C_i strogo konkavna za kratka rastojanja, a linearna za velika. Matematički se ovi uslovi mogu zapisati kao

$$C_i[d_i(x)] = k_i + w_i d_i^\alpha(x), \alpha \in (0,1), x \neq a_i$$

Rešavanje ovog problema za Euklidovo rastojanje je slično Weiszfeld-ovoj (Cooper 68), odnosno iz izjednačavanja gradijenta sa nulom, nalazimo iterativnu formulu kao (videti(9)):

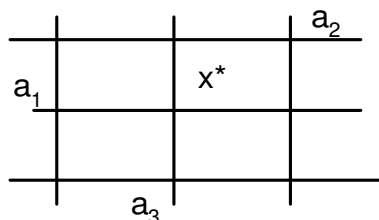
$$x_j^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^m w_i a_j^{(i)} \cdot d_i^{\alpha-2}(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^m w_i \cdot d_i^{\alpha-2}(x^{(k)})}, \quad j = 1, 2.$$

Kako $f(x) = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(x)]$ - nije konveksna, dobijena tačka nije garantovano globalni minimum.

Međutim, za pravougaono rastojanje $d(x, a_i) = \sum_{j=1}^2 |x_j - a_j^i|$ važi sledeći Stav (koga nećemo dokazivati):

Stav 9. (Wendell i Hurter (73)). Sve optimalne lokacije (ako ih ima više od jedne) pripadaju tačkama preseka pravih paralelnih osama, koje prolaze kroz a_i .

Koristeći ovaj stav moguće je konstruisati proceduru nalaženja optimalnog rešenja prebrojavanjem svih tačaka preseka pravih iz gornjeg stava (slika 9). Detalje algoritma ostavljamo čitaocu kao vežbu.



Slika 9. Optimalno rešenje x^* je na preseku pravih paralelnih osama.

Primer 4. Ako se putni troškovi mere gubitkom korisnosti, tada $C_i[d_i(x)]$ raste sa rastojanjem i strogo je konveksna. Ovaj slučaj je ređi u praksi., mada se teorijski najlakše rešava (lokalni optimum je i globalan). Ovo se može matematički formulisati kao

$$C_i[d_i(x)] = k_i + w_i d_i^\alpha(x), \alpha > 1$$

Primer 5. U ovom primeru, pretpostavimo samo da je $C_i(\cdot)$ rastuća i neprekidna od rastojanja, tj.

$$(\min) f(x) = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(x)].$$

Pošto je zbir neprekidnih funkcija takođe neprekidna, sledi da je i $f(x)$ neprekidna.

Sledeći stav određuje oblast u kojoj treba tražiti globalni minimum ovog nekonveksnog zadatka.

Stav 10. (Wendell, Hurter 73): *Globalni minimum leži u konveksnom omotaču tačaka $a_1, \dots, a_m$.*

Korišćenjem ovog stava i tehnike grananja i ograđivanja, za rešavanje zadatka iz Primera 5, predložena je metoda "Veliki kvadrat – mali kvadrat" ("Big Square - Small Square") (Hansen, Thisse (81)).

Algoritam 5. (Veliki kvadrat – mali kvadrat)

Korak 1: Izabrati početnu tačku $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i$ koja pripada konveksnom omotaču (KO) i naći

$$\bar{f} = f(x_0)$$

Korak 2: Podeliti konveksni omotač KO ($a_1, \dots, a_m$) na zone (kvadrate) i naći donju granicu svake od zona, tj.

$$\underline{f}_{z_j} = \sum_{i=1}^m C_i[d_i(Z_j)]$$

gde je dijametar $d_i(Z_j) = (\min) d(a_i, Z_j)$ - najkraće rastojanje između a_i i zone Z_j .

Korak 3: Eliminirati sve zone Z_j za koje važi $\underline{f}_{z_j} > \bar{f}$.

Korak 4: ako je dijametar ne eliminisanih zona manji od proizvoljno malog broja ε , kraj.

Korak 5: izračunati vrednosti f u proizvoljnim tačkama ne eliminisanih zona (na primer u centru) i onu gde je f najmanja označiti sa $\bar{f}$. Podeliti preostalu oblast na još manje zone tj. preći na korak 2.

		$a_3 \equiv x_3$	x_2
x_1	Z_1	Z_2	
$a_1 \equiv x_1$	Z_3	Z_4	
	x_3	$a_2 \equiv x_2$	

Slika 10. Ilustracija zona u metodi *Veliki kvadrat-mali kvadrat*

Rešenje dobijeno ovom metodom je aproksimacija optimalnog rešenja. *Veliki kvadrat – mali kvadrat* se jednostavno uopštava za rešavanje problema sa lokacijskim ograničenjima.

Kao realan primer primene ove metode, u kome je dakle funkcija cilja rastuća i neprekidna od rastojanja, navešćemo tzv. problem maksimalnog potencijala.

Primer 6 (*Problem maksimalnog potencijala*). Treba odrediti tačku u ravni (npr. grad u nekoj državi), koji ima maksimalnu interakciju ili maksimalan potencijal. U zavisnosti od rezultata, neka firma želi da u tom gradu otvori predstavništvo, na primer. Po dobro utvrđenoj tradiciji u geografiji, obim kretanja između dva grada proporcionalan je količini i atraktivnosti njihovih proizvoda (ponude), a obrnuto proporcionalan stepenu rastojanja između njih (Reilly, 1931). Funkcija cilja koja je predložena u nameri da predstavi ovu situaciju je oblika

$$(\max) f(x) = \sum_{i=1}^m P_i(x) = \sum_{i=1}^m \frac{A}{[B + d_i(x)]^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

gde su

m - broj gradova;

A_i - mera aktivnosti (privlačnosti, potencijala) grada.

B_i - data konstanta.

Jasno je da se ovaj zadatak može svesti na Veberov problem i kao takav rešiti, odnosno, problem maksimuma se može svesti na zadatak minimuma uvođenjem konstante K u model.

$$(\min) f(x) = \sum_{i=1}^m [K - P_i(x)],$$

gde je K - dovoljno veliki broj, i rešiti približnom metodom *Veliki kvadrat – mali kvadrat*.

3.3 Lokacija neželjenih objekata (anti Weber). U urbanim sredinama čest je problem određivanja deponija za gradsko đubre, automobilskih i drugih otpada itd. Tada treba naći lokaciju tzv. neželjenog objekta koji će biti udaljen od mesta gde ljudi žive, a opet u okviru opštine ili države dovoljno blizu, kako bi cena transporta bila manja. Ovaj problem se naziva i anti-Veberov. Oblik funkcije cilja je

$$(20) \quad (\min) f_D(x) = \sum_{i=1}^m D_i[d_i(x)], \quad x \in S,$$

gde su

S – skup dozvoljenih lokacija;

x – nepoznata lokacija;

D_i – opadajuća, i neprekidna nelinearna funkcija od rastojanja;

U anti-Weberovom problemu traži se dakle lokacija neželjenog objekta, tako da ukupna "šteta" $f(x)$ (u odnosu na postojeće objekte) bude minimalna. Ako pretpostavimo da je $D_i(\cdot)$ u gornjoj formuli za funkciju cilja rastuća (a ne opadajuća) i neprekidna od rastojanja, tada "korist" raste sa rastojanjem x od fiksnih lokacija, pa treba naći maksimum od $f(x)$. Drugim rečima, anti-Weberov problem se može analogno definisati i kao $(\max)f(x)$, gde su $D_i(\cdot)$ rastuće.

Ako bi se ograničenje $x \in S$ izbrisalo iz modela, jasno je da bi x^* bilo negde u beskonačnosti (deponiju treba locirati u drugu galaksiju).

Metoda *Veliki kvadrat-mali kvadrat* se može podesiti i za rešavanje ovog zadatka, tako što se S podeli u konačnu familiju konveksnih poligona. Međutim, ako su $D_i(\cdot)$ linearne, problem je lako rešiv, tj.

$$(\max) f_D(x) = \sum_{i=1}^m w_i d(a_i, x), \quad x \in S$$

Stav 11. *Ako su D_i linearne funkcije i S poligon ili unija konveksih poligona, tada je optimalno rešenje u temenima poligona.*

Dokaz. Zaista, ako su $D_i(\cdot)$ opadajuće, tada je $f(x)$ konkavna, a ako su $D_i(\cdot)$ rastuće, tada je $f(x)$ konveksna, jer je $d_i(x)$ konveksna (Stav 1).

Po poznatoj teoremi NP minimum konkavne (ili maksimum konveksne) funkcije se nalazi na rubu oblasti S . Ako je S poligon, ili je unija konveksnih poligona, optimalno rešenje anti-Weberovog problema se može dobiti jednostavnim računanjem funkcije cilja u svim rogljevima poligona S .

I u ovoj vrsti problema moguće je formulisati funkciju cilja na različite načine. Pored *Min-Sum* oblika, moguće je posmatrati i *Min-Max* zadatak.

RAULSOV PROBLEM, Min-Max KRITERIJUM

Očigledno je da Veberov model zapostavlja izolovane korisnike usluga, odnosno Veberova tačka je najbliža "prosečnom" korisniku. Zaista, ako se $f_w(x)$ podeli sa konstantom $W = \sum w_i$, tada su rešenja (tj. x^*) problema $(\min) f_w(x)$ i $(\min) f_w(x)/W$ jednaka. Sa druge strane, $f_w(x)/W$ predstavlja srednju (prosečnu) vrednost rastojanja od korisnika lociranih u $a_i, i = 1, \dots, m$, i nove lokacije x . Iz tog razloga je u knjizi "Theory of Justice" Rawls (1971) predložio ravnopravno tretiranje i naseljenih i nenaseljenih mesta u izboru nove lokacije, na primer bolnice, stanice hitne pomoći ili vatrogasne brigade. U ovim slučajevima stanovnik na periferiji grada bi trebao da ima ista prava za hitnom intervencijom kao i stanovnik u centru. Za razliku, dakle, od Mim-Sum kriterijuma, predložen je Min-Max kriterijum, po kome se minimizira maksimalno težinsko rastojanje između novog i postojećih objekata.

$$(21) \quad (\min) f_R(x) = \max_i w_i d_i(x) \quad i = 1, \dots, m.$$

Za lokaciju televizijskih odašiljaca, radara i slično, težinski koeficijenti nisu bitni pa su svi koeficijenti jednaki 1, odnosno

$$(22) \quad (\min) f_R(x) = \max_i d_i(x) \quad i = 1, \dots, m$$

Sada će biti izložena drugačija ekvivalentna formulacija Raulsovog problema u opštem slučaju (odnosno za $l_p, p > 1$ rastojanje), sa ciljem da se problem svede na zadatak konveksnog nelinearnog programiranja:

$$\begin{aligned} & (\min) z \\ \text{p.o.} \quad & w_i \cdot d_p(x, a_i) \leq z, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Zaista, dobijeni model je konveksan, jer su funkcije u skupu ograničenja konveksne (Stav 5).

U specijalnom slučaju, za $p = 2$ (Euklidovo rastojanje) i $w_i = 1$, uvođenjem smene $x_3 = z - (x_1^2 + x_2^2)$, prethodni problem se svodi na jednostavan zadatak kvadratnog programiranja (po promenljivim x_1, x_2 i x_3),

$$\begin{aligned} & (\min) x_1^2 + x_2^2 + x_3 \\ \text{p.o.} \quad & 2x_1 a_1^{(i)} + 2x_2 a_2^{(i)} + x_3 \geq (a_1^{(i)})^2 + (a_2^{(i)})^2, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Raulsov problem (ne težinski slučaj) može se rešiti i geometrijski. Geometrijska formulacija glasi: konstruisati krug minimalnog prečnika, tako da skup datih tačaka u ravni $A = \{a_i(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), i = 1, \dots, m\}$, budu unutar kruga. Ovo je dakle zadatak pokrivanja datog skupa

tačkaka A . Konveksni omotač H tačkaka a_i je poligon (mnogougao), sa temenima u nekim od datih lokacija a_i . Kako važi $a_i \in H, \forall i$, to sledeći očigledan stav omogućuje traženu konstrukciju:

Stav 12. *Minimalni pokrivajući krug konveksnog mnogougla H sadrži bar dva njegova temena.*

Algoritam koji bi se oslanjao na stav 12 bi trebao da pronade te dve tačke kroz koje prolazi tražena minimalna kružnica. Naravno, proverom svake dve može se doći do rešenja, mada to nije najbrže.

Biće izložena najpoznatija metoda za rešavanje Rawls-ovog problema u ravni. Iako je ona konstruktivna (geometrijska), lako se prevodi na računar.

Algoritam 6 (Elzinga, Heran 72)

Korak 1: Konstruisati konveksni omotač H , skupa tačkaka $A = \{a_i, i = 1, \dots, m\}$.

Korak 2: Izabrati bilo koja dva temena iz skupa A , i obeležiti ih sa a i b .

Korak 3: Tačke a i b određuju prečnik kruga. Ako sve tačke iz A pripadaju krugu, tj.

$$H \subset K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \text{ tada je } x^* = \frac{a+b}{2}, \text{ kraj;}$$

ako nije izabrati bilo koju tačku $c \in A$ van kruga K .

Korak 4: ako je trougao abc pravougli ili tupougli, obeležiti temena najveće stranice sa a i b pa preći na Korak 2; ako je trougao oštrogli, opisati krug (centar x) oko trougla abc ; ako sve tačke $a_i, \dots, a_m$ pripadaju krugu (lopti), tada je $x^* = x$ i kraj;

Korak 5: izabrati tačku a van kruga, a sa b označiti tačku trougla najdalju od a . Povuci pravu $\overline{Ob}$ i sa c označiti tačku trougla sa druge strane prave od a , pa preći na Korak 3.

Računska složenost ovog algoritma je $O(m^2)$, mada u drugačijoj implementaciji može se postići vremenska složenost $O(m \log m)$ (Aho, Hopcroft, Ulman 74.). Postoji puno metoda i za težinski slučaj Rawls-ovog problema (videti npr. Jacobsen (81)), ali se na njima nećemo zadržavati.

Za pravougaono rastojanje Fransis (72) daje analitičko rešenje za ne težinski slučaj: rešenje je bilo koja tačka na duži $\overline{ab}$, gde su

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(g_1 - g_3, g_1 + g_3 - g_5) \\ b &= \frac{1}{2}(g_2 - g_4, g_2 + g_4 - g_5) \\ g_1 &= \min_{i=1, \dots, m} (a_1^i + a_2^i) \quad g_2 = \max_{i=1, \dots, m} (a_1^i + a_2^i) \\ g_3 &= \min_{i=1, \dots, m} (a_1^i - a_2^i) \quad g_4 = \max_{i=1, \dots, m} (a_1^i - a_2^i) \end{aligned}$$

$$g_5 = \max(g_2 - g_1, g_4 - g_3)$$

4.1. Veber - Raulsov problem. U realnim situacijama kompromis između Veberovog i Raulsovog problema je dvokriterijumski zadatak gde je $f = (f_w, f_r)$. U njegovom rešavanju može se primeniti bilo koja metoda izložena u trećem poglavlju ove knjige. Ako se traži Pareto-optimalno (efikasno ili nedominantno) rešenje, predložen je sledeći algoritam, koji koristi specifičnosti ova dva lokacijska zadatka:

Algoritam 7 (Hausen, Peeters, Thisse 81).

Korak 1: Rešiti Veberov problem $f_w(x)$; obeležiti sa x' optimalno rešenje;

Korak 2: Izračunati $f_r(x')$; obeležiti sa f' dobijenu vrednost;

Korak 3: $f' = f' - h$, gde je h - korak, fiksni mali broj;

Korak 4: Umanjiti proporcionalno sa h u odnosu na f' sve $d_i(x)$ i obeležiti ih sa r_i , tj.

$$r_i = d_i(x') \cdot \frac{f' - h}{f'}$$

Korak 5: Opisati krugove sa centrima u a_i i poluprečnicima r_i ($K_i(a_i, r_i)$).

Korak 6: Ako je presek krugova prazan skup x' je Pareto optimalno rešenje i kraj. U suprotnom rešiti Veberov problem sa lokacijskim ograničenjima koja su predstavljena kao presek krugova, obeležiti dobijeno rešenje sa x' pa preći na korak 2.

LOKACIJA VIŠE OBJEKATA

Do sada je bilo reči o lokaciji samo jednog novog objekta. Mnogo češći slučaj u praksi je određivanje više novih objekata istovremeno.

Kod lokacije više objekata pojavljuju se sledeća pitanja:

- koji je optimalni broj novih objekata?
- koji korisnici su usluženi od kog snabdevača (alokacijske promenljive y_{ij})
- koja je uloga interakcije između snabdevača (novih objekata)?

U modelima lokacije više novih objekata, razlikujemo one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija i one kod kojih međusobna veza ne postoji. I kod ovih modela se mogu primeniti klasifikacije navedene u problemima lociranja jednog novog objekta. Može se posmatrati minisum (Veberov) ili minimax (Raulsov) problem lokacije više objekata, rastojanja se takođe mogu određivati na različite načine, itd.

5.1. Min-Sum (Veberov) problem lokacije više objekata. Ovaj problem formulisao je Miehele 1958:

$$(\min) f_M(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q w_{ij} d_i(x_j) + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^q v_{jk} d(x_j, x_k)$$

m - broj fiksnih (postojećih) objekata,
 q - broj novih objekata,
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ - nepoznate lokacije novih objekata,
 $x_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ - $j = 1, \dots, q$, koordinate nepoznatih objekata,
 v_{jk} , $j, k = 1, \dots, p$ - mera interakcije između novih objekata j i k (odnosno cena),
 gde je $v_{jk} = v_{kj}$,
 w_{ij} - cena jediničnog transporta od korisnika i do nove lokacije j ,
 $d_i(x_j) = d(x_j, a_i)$ - rastojanje između korisnika i j -te nove tačke,
 $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate i -tog korisnika.

Dakle, funkcija cilja može predstavljati ukupnu cenu transporta između postojećih i novih objekata, kao i između samih novih objekata. Specijalan slučaj modela je kada je $v_{jk} = 0$, odnosno kada ne postoji interakcija između novih objekata.

I u modelu lokacije više objekata kao meru rastojanja moguće je izabrati pravougaono, Euklidovo ili l_p rastojanje, što zavisi od konkretnog problema koji se rešava.

Sa matematičke tačke gledišta, osnovno je pitanje konveksnosti funkcije $f_M(x)$.

Stav 13. Funkcija $f_M(x)$ je konveksna, za l_p ($p > 1$) funkciju rastojanja.

Dokaz. Ranije je dokazano da je $d_p(x_j, a_i)$ konveksna. Da bi dokazali tvrđenje ovog stava, dovoljno je dokazati da je $d_p(x_j, x_k)$ konveksna, za svako $p \in (1, \infty)$. (Razlika između $d_p(x_j, a_i)$ i $d_p(x_j, x_k)$ je očigledno u tome što su u $d_p(x_j, x_k)$ i x_j i x_k promenljive).

Obeležimo sa $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$. Tada je

$$(23) \quad d_p(x_j, x_k) = g(y) = (|y_1 - y_2|^p + |y_3 - y_4|^p)^{1/p}$$

Konveksnost $g(y)$ sledi iz nejednakosti Minkovskog i definicije konveksnosti, što ostavljamo čitaocu da proveriti (pogledati dokaz Stava 5). Konačno $f_M(x)$ je konveksna jer je zbir konveksnih funkcija. ♦

Slično kao i u zadatku lokacije jednog objekta, $f_M(x)$ nije glatka, o čemu govori sledeći stav.

Stav 14. Izvod funkcije $d_p(x_j, x_k)$, pa samim tim i izvod $f_M(x)$, nije definisan za svako $x_j, x_k \in \mathbf{R}^2$.

Dokaz. Kao i u dokazu prethodnog stava, neka je $d_p(x_j, x_k) = g(y)$ definisano sa (23).

Definišimo jedinični pravac, $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbf{R}^4, \|s\| = 1$, pa posmatrajmo skup

$$S = (y \in \mathbf{R}^4 \mid y_1 = y_2, y_3 = y_4).$$

Ako bi prvi izvod po pravcu u tački $y \in S$ postojao, onda bi po definiciji bio dat sa

$$\begin{aligned} \frac{dg(y)}{ds} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(y + \lambda s) - g(y)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\lambda| \cdot [|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}}{\lambda} = \\ &= \begin{cases} [|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}, & \lambda > 0 \\ -[|s_1 - s_2|^p + |s_3 - s_4|^p]^{1/p}, & \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

odakle sledi da limes ne postoji (levi nije jednak desnom). Kako su x_k i x_j bilo koje dve tačke u ravni, izvod $d_p(x_j, x_k)$ nije definisan za $x_j = x_k$. ♦

Da bi se omogućilo rešavanje ovog konveksnog ne glatkog optimizacionog zadatka, korišćenjem metoda nelinearnog programiranja prvog reda, koristi se ista ideja kao u rešavanju Veberovog problema, odnosno uvodi se nova funkcija $f_M(x, \epsilon)$, koja za $\epsilon \rightarrow 0$ ima isto rešenje i daje istu vrednost minimuma kao i $f_M(x)$. Funkcija $f_M(x, \epsilon)$ dobija se tako što se $d_i(x_j)$ i $d(x_j, x_k)$ zamene sa

$$\begin{aligned} d_i(x_j) &= \left(\sum_{l=1}^n (x_l^j - x_l^i)^p + \epsilon \right)^{1/p} \\ d(x_j, x_k) &= \left(\sum_{l=1}^n (x_l^j - x_l^k)^p + \epsilon \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Lako se može pokazati da su svi izvodi funkcije $f_M(x, \epsilon)$ neprekidni. Da $f_M(x, \epsilon)$ teži $f_M(x)$ pri $\epsilon \rightarrow 0$, govori sledeći Stav.

Stav 15. $\max_x [f_M(x, \epsilon) - f_M(x)] \leq 2^{1/p} \cdot \epsilon^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \omega_{ij} + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^q v_{jk} \right)$

Dokaz ovog Stava je sličan dokazu stava 8, pa ga prepuštamo čitaocu. Budući da su svi teorijski uslovi za rešavanje zadatka $\min f_M(x)$ analogni $\min f_W(x)$, to se i ovde može primeniti

Vajsfeldova iterativna procedura. Posle izjednačavanja gradijenta sa nulom iterativna metoda rešavanja se može dobiti kao

$$x_j^{(k+1)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^m w_{ij}}{d_i(x_j^{(k)})} + \frac{\sum_{u \neq j} v_{kj} \cdot y_k}{d(x_j, x_k^{(k)})}}{\frac{\sum_{i=1}^m w_{ij}}{d_i(x_j^{(k)})} + \frac{\sum_{u \neq j} v_{kj}}{d(x_j, x_k^{(k)})}}, \quad j = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots,$$

gde je $x_j^{(k)} = (x_{1j}^{(k)}, x_{2j}^{(k)})$ lokacija j -tog novog objekta u k -toj iteraciji.

Gore navedeni rezultati odnose se na l_p ($p > 1$) rastojanje. Za pravougaono rastojanje ($p = 1$), problem se može svesti (na čemu se nećemo zadržavati) na n (za probleme u ravni $n = 2$) potproblema. Svaki od njih je zadatak linearnog programiranja sa $q^2 + 2mq$ - promenljivih i $q(q-1)/2$ ograničenja. Simpleks metoda se pokazala ne efektivnom zbog velikog broja promenljivih i ograničenja. Cabat, Francis, Stary (70) pokazali da se dualni problemi može svesti na zadatak minimalnog protoka na mreži sa $m + q$ temena i $mq + \frac{q(q-1)}{2}$ lukova, a ovaj se lakše rešava jer je strogo polinomijalne vremenske složenosti (zadatak na mreži je strogo polinomijalan ako je broj operacija u njegovom rešavanju ograničen polinomijalnom funkcijom od broja temena i lukova, tj. ne zavisi od dužine lukova).

5.2. Min-max lokacijski problem s više novih objekata. Ovaj zadatak moguće je formulisati kao

$(\min) f_R(x) = \max \{w_{ij}d_i(x_j), v_{jk}d(x_j, x_k)\}, i = 1, \dots, m; j, k = 1, \dots, q; 1 \leq j < k \leq q$ gde parametri modela imaju isto značenje kao u Min-Sum problem iz 5.1. Zbog ograničenosti prostora, nećemo se zadržavati na ovom problemu.

5.3 Lokacija p neželjenih objekata. Pomenućemo samo interesantnu klasu modela lokacije p neželjenih novih objekata, tako da objekti budu što je moguće dalji jedni od drugih u nekoj zatvorenoj datoj oblasti S . Primetimo da u njima ne figurišu postojeći objekti. Dakle, data je samo oblast (na primer, konveksni mnogougao S) i broj novih lokacija p . Na primer, treba odrediti p lokacija nuklearnog otpada, hazardnog materijala ili vojnih baza, tako da one budu što je moguće dalje jedna od druge. Erkrut i Newman () predlažu 4 modela ovog tipa: a) *max-min-min*; b) *max-min-sum*; c) *max-sum-min* i d) *max-sum-sum*. Funkcije cilja ovih modela su:

a) $\max_{x \in S} (\min_i \min_j d(x_i, x_j))$

b) $\max_{x \in S} (\min_i \sum_{j=1}^p d(x_i, x_j))$

c) $\max_{x \in S} \sum_{i=1}^p \min_j d(x_i, x_j)$

$$d) \max_{x \in S} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r d(x_i, x_j)$$

Svi ovi problemi pripadaju klasi problema globalne optimizacije. Model pod a) je poznat i kao p -disperzioni (p -dispersion), dok se problem pod d) često naziva i problem " p -zbirne odbrane" (p -defence sum).

Max-min-min (p-Disperzioni problem). Ako je rastojanje Euklidovo, p -disperzioni problem je tesno vezan sa klasičnim matematičkim *zadatkom pakovanja krugova jednakih poluprečnika u kvadrat*: konstruisati p disjunktnih krugova istog poluprečnika u jedinični kvadrat tako da poluprečnik bude što je moguće veći.

Zaista, (24) se očigledno može predstaviti i kao zadatak nelinearnog programiranja:

Max r

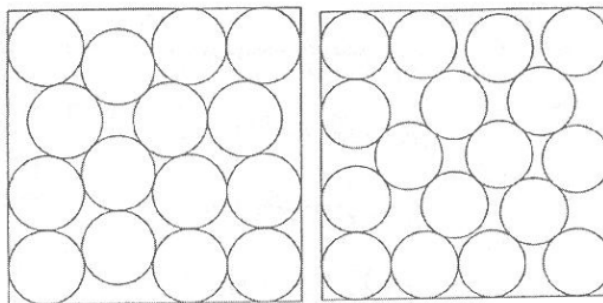
po ograničenjima

$$(26) \quad d(x_i, x_j) \geq r, \text{ za svaki } i, j = 1, \dots, p \quad i \neq j,$$

$$x_i \in S$$

Ako je S jedinični kvadrat, d Euklidovo rastojanje i r prečnik, tada p -disperzioni problem postaje zadatak pakovanja krugova. Godinama su matematičari nalazili konstruktivno bolja i bolja rešenja (tj. rešenja sa većim poluprečnikom) za $p = 5, 6, 7, \dots, 12$. Nedavno su primenom metoda nelinearnog programiranja na model (24) nađena približna rešenja za $p = 13, 14, \dots, 30$. (Drezner i Erkut, 1995). Neka od tih rešenja data su na slici 11.

Primetimo da problem (24) ne pripada klasi konveksnih programa, jer skup definisan skupom ograničenja očigledno nije konveksan u prostoru dimenzije $2n+1$. Programski paket *Minos* (Gill, Murray i Wright (1981)), sa svoje stane, transformiše problem NP sa ograničenjima u problem bez ograničenja; tako dobijena funkcija naravno, nije ni konveksna ni konkavna, pa u problem postoji više lokalnih maksimuma. Kako *Minos* završava sa radom kada je gradijent jednak nuli, to dobijeno rešenje ne mora biti čak ni lokalni maksimum, već može biti *stacionarna tačka*. Iz tog razloga su Drezner i Erkut (1995) za svako n po 100 puta startovali *Minos*, ali iz drugačijeg početnog rešenja i saopštili najbolje tako dobijeno rešenje.



Slika 11. Pakovanje 13 i 17 krugova primenom paketa NP *Minos*

Pakovanje krugova u krug. Ako je skup S iz problema (24) jedinični krug, a ne kvadrat, tada se problem pakovanja datog broja (n) krugova u S može formulisati na sledeći način:

$$\text{Max } r$$

p.o.

$$\begin{aligned}(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - 4r^2 &\geq 0, \quad 1 \leq j < i \leq n, \\ xi^2 + yi^2 - (1 - r)^2 &\leq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ (xi, yi) &\in R^2, \quad 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Prvim skupom ograničenja se obezbeđuje disjunktnost krugova poluprečnika r , dok se drugim skupom ograničenja zahteva da krugovi u celosti moraju pripadati jediničnom krugu.

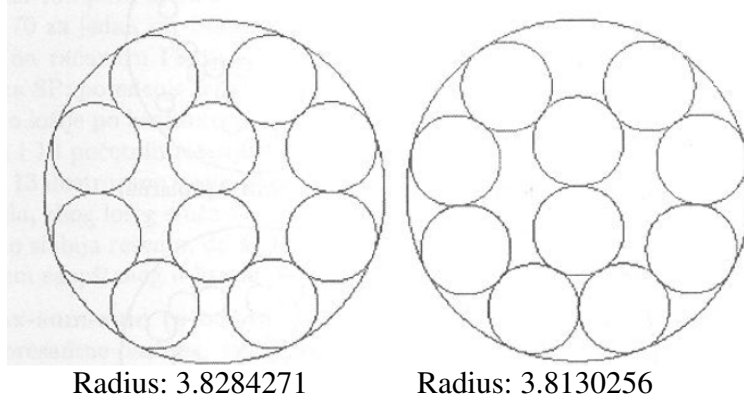
Pored formulacije u Dekartovim koordinatama (x_i, y_i) , problem se jednostavno može preformulisati koristeći polarne koordinate (ρ_i, ϑ_i) , pa problem pakovanje n krugova ima sledeći oblik:

$$\text{Max } r$$

p.o.

$$\begin{aligned}\rho_i^2 + \rho_j^2 - 4\rho_i\rho_j \cos(\theta_i - \theta_j) - 4r^2 &\geq 0, \quad 1 \leq j < i \leq n, \\ \rho_i + r &\leq 1, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \rho_i, r &\geq 0, \quad \theta_i \in [0, 2\pi] \quad 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Primitimo da je gornji problem ekvivalentan pakovanju jediničnih krugova u krug minimalnog poluprečnika R ($R=1/r$). Na slici 12. data su 2 rešenja pakovanja 10 jediničnih krugova. Dugo se smatralo da je rešenje dato na levoj strani slike optimalno, međutim, ispostavilo se da je rešenje sa desne strane bolje (odgovara mu manji radius R , odnosno veći poluprečnik r). U radu Mladenović, Plastria, Urošević (2004) primećeno je da se od prvog do drugog rešenja sa slike 12 može doći pomeranjem svih centara krugova koji dodiruju veliki krug. Naime, svi pomenuti centri pripadaju istom krugu pa je transformacija kojom se oni pomeraju duž istog kruga nelinearna u Dekartovim, a linearna u polarnim koordinatama. Iz tog razloga je predložena metoda kojom se iterativno menjaju formulacije problema.



Slika 12. Dva rešenja pakovanja 10 krugova

Iako su formulacije problema pakovanja i u Dekartovim i u polarnim koordinatama ekvivalentne (optimalna rešenja oba modela u su ista), Mladenović, Plastria i Urošević (2003) su oučili sledeće:

Stav 16. Skupovi stacionarnih tačaka preformulisanih modela s Dekartovim i polarnim koordinatama pakovanja krugova u jedinični krug nisu jednaki.

Dakle, kada *Minos* (ili neki drugi program rešavanja NP-a koji koristi prve parcijalne izvode) završi sa radom u jednoj formulaciji, takvo rešenje je moguće popraviti jednostavnom promenom formulacije uz primenu iste optimizacione metode. U istom radu Mladenović, Plastria, Urošević (2003) predlažu novu metodu nazvanu *Reformulacioni spust* (*reformulation descent*), koja koristeći očigledan stav 16, iterativno menja formulacije problema sve dok postoji bolje rešenje id ok ono nije stacionarna tačka pos vim formulacijama (videti sliku13).

Ova metoda se naravno može primeniti i u drugim problemima globalne (nekonveksne) optimizacije. Njeni koraci su sledeći:

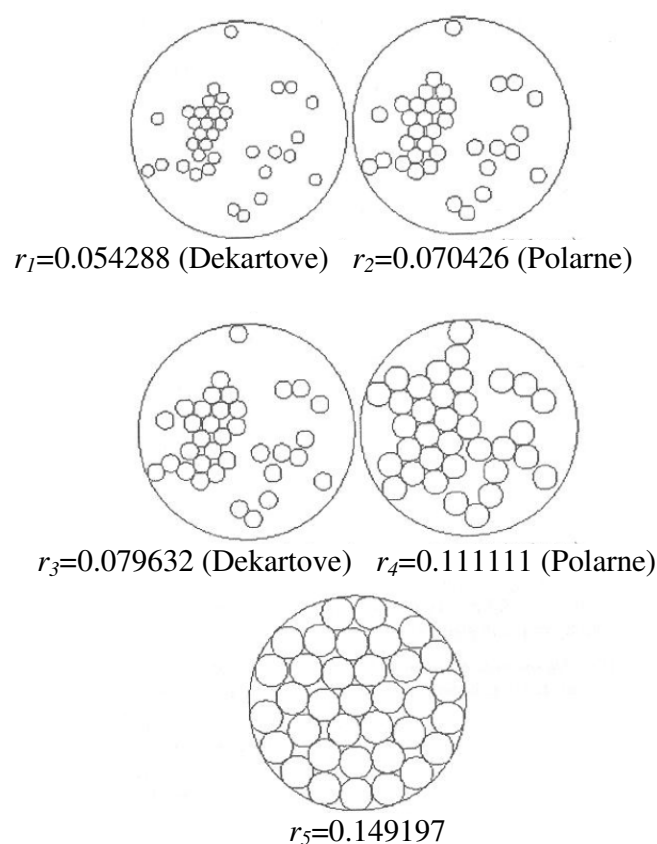
Algoritam 8. (*Reformulacioni spust*)

Korak 1. Konstruisati namanje dve nelinearno povezane formulacije problema;

Korak 2. Izabrati početno rešenje Z ;

Korak 3. Ponavljati sledeće korake pos vim definisanim formulacijama:ž

- (a) naći stracionarnu tačku Z' primenom neke NP metode, čije je početno rešenje Z ;
- (b) (b) ako je Z' bolje od Z , tada je $Z = Z'$; vratiti se na korak 3, tj. na prvu formulaciju;



Slika 13. Iteracije metode reformulacionog spusta u pakovanju 35 krugova

U pomenutom radu korišćen je paket *Minos* u rešavanju problema pakovanja $n = 10, 11, \dots, 100$ krugova u jedinični krug. Upoređene su metode: (i) *Minos* s formulacijom pomoću Dekatvodih koordinata / (MD); (ii) *Minos* s formulacijom pomoću polarnih koordinata (MP); (iii) Metoda reformulacionog spusta (RS) koja takođe koristi *Minos* u koraku 3 (a); (iv) paket Spenbar (SP) koji je baziran na Njutnovoj metodi, dakle metodi koja koristi i druge parcijalne izvode (Hessian), pa se ne zaustavlja u stacionarnoj tački.

Pokazano je da su metode RS i SP slične po kvalitetu dobijenog rešenja, ali je RS oko 150 puta brža. Pored toga, sa SP nije bilo moguće rešiti problem veće od $n=70$ za jedan sat kompjuterskog vremena. Preciznije, prosečno procesorsko vreme (na računaru Pentium IV, 1800MHz) je bilo 4,94 sekunde za RS prema 704,96 za SP; poređenje je izvršeno za $n=10, 11, \dots, 70$. Metode MD i MP su bile značajno lošije po kvalitetu rešenja u proseku. Njihova prosečna greška (Na svih 90 primera i 10n početnih rešenja za svako n) bila je 79,25% za MD i 26,95% za MP. Na slici 13 ilustrovane su iteracije metode RS na primeru upisa 35 krugova. Iz slike se vidi da, zbog lošeg slučajno izabranog početnog rešenja, prvih par iteracija daje relativno slabija rešenja, da bi se u petoj iteraciji dobilo rešenje vrlo blizu do sada najboljem saopštenog u literature (tj. vrednosti $r = 0,149294468$)

Max-sum-sum (p-odbrambeni) problem je definisan formulom (25). On ima interesantne osobine, što je pokazano u radu Mladenovića i Plastria (2000). Pretpostavimo da je skup S konveksni poliedar u q -dimenzionalnom prostoru, odnosno neka je

$$(27) \quad S = \{x \in R^q \mid Ax \leq b, b \in R^m, A \in R^{mq}\}$$

Tada važi sledeći stav:

Stav 17. *Optimalno rešenje x_j^* , $j=1, \dots, p$, max-sum-sum problema (25), gde je S definisano sa (27), nalazi se u rogljevima poliedra S .*

DOKAZ. Neka je $X=(x_1, \dots, x_p) \in R^{qp}$ i neka je $S^p=S \times S \times \dots \times S$. Sad se $f_4(x)$ može predstaviti kao

$$Maxg(x) = \sum d(x_i, x_j), \quad X \in S^p$$

Dokaz ovog stave zasnovan je na poznatom tvrđenju da se maksimum konveksne funkcije nad konveksnom oblašću dostiže na rubovima te oblasti. Kao je $g(X)$ konveksna funkcija (kao zbir konveksnih), to se maksimum dostiže u ekstremnim tačkama (rogljevima) S^p . S druge strane važi da je $ext(S^p) = (ext(S))^p$, pa dakle $(x_1, \dots, x_p) = (e_1, \dots, e_p)$, gde je $e_j \in ext(S)$

Dakle, iako je proctor mogućih lokacija beskonačan (kontinuum), svih p tačaka će se naći u rogljevima poliedra S . Postavlja se pitanje da li je moguće da u optimalnom rešenju više od jednog novog objekta bude locirano u istoj tački. Takvo rešenje nazvaćemo *degenerisanim*.

Stav 18. *Optimalno rešenje problema (25) može biti degenerisano ako je $p > 3$.*

DOKAZ. Lako uočavamo da za $p \leq 3$ rešenje nije nikad degenerisano. Dokaz ćemo izvesti pomoću kontraprimera za $n = p = 4$ i proizvoljno q . Odredimo poliedar S sa sledeća četiri roglja: e_1 je centar sfere čiji je poluprečnik jednak 10; ostale tri rubne tačke su smeptene na sferi na međusobnom rastojanju 1, 1 i 2 respektivno. Ako su sve 4 tražene lokacije smeštene u rogljevima, tj. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, tada funkcija cilja ima vrednost $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$(10+10+10+2+1+1) = 34$. Ali ako dve nove tačke lociramo u e_1 , odnosno ako je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (e_1, e_2, e_3, e_1)$, tada funkcija cilja ima vrednost $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10+10+0+1+10+10) = 41$. Dakle bolja (veća) vrednost je dobijena u degenerisanom rešenju.

Sledeći ove rezultate Mladenović i Plastria (2000) su pokazali da se problem (25) može svesti na specifičan kombinatorni problem, tj. na *kvadratni problem ranca* (*quadratic knapsack problem*).

LOKACIJSKO - ALOKACIJSKI PROBLEM

Do sada su razmatrani lokacijski modeli u kojima je protok (ili alokacija) između novih i postojećih objekata dat (tj. alokacije w_{ij} i v_{jk} u problemu lokacije više objekata). U praksi je međutim daleko češći slučaj da su i w_{ij} i v_{jk} nepoznate. Pored toga, u model ponekad treba uvesti i broj novih objekata (q) kao promenljivu zbog različitih fiksnih troškova vezanih za otvaranje objekta.

U ovom delu ograničićemo se na najjednostavniji lokacijsko-alokacijski model, u kome se pored lokacija novih objekata određuje i gde će se koji korisnik snabdevati (alocirati).

Pojednostavljenje se sastoji u sledećem:

- ne postoje interakcije između novih objekata
- broj novih objekata je unapred zadat
- korisnici se snabdevaju jednom vrstom robe (*single - commodity*)
- kapacitet novih lokacija (distributivnih centara) nije ograničen.

Dugi nazivi za lokacijsko-alokacijski problem je *više-izvorni Veberov problem* (*Multisource Weber*).

Osnovni model lokacijsko - alokacijskog zadatka (Cooper, 1963) ima sledeći oblik:

$$(\min) f_{LA}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^p y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

gde su

$$d_i(x_j) = d(a_i, x_j)$$

p - broj novih objekata (nepoznatih)

m - broj korisnika (grupa korisnika)

x_j - nepoznate lokacije novih objekata, $j = 1, \dots, p$ (lokacijska promenljiva)

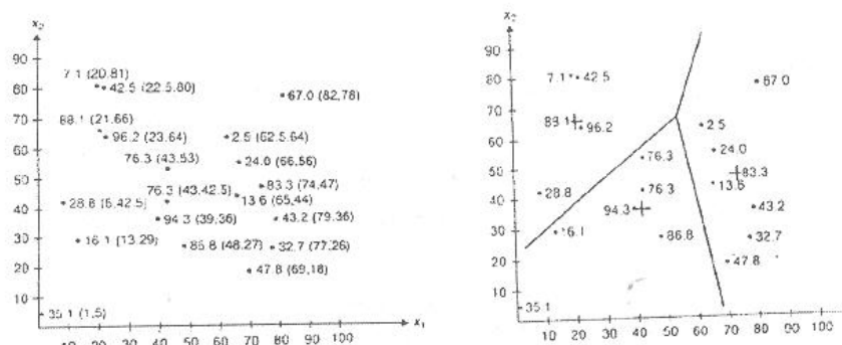
y_{ij} - promenljiva koja određuje proporciju zahteva korisnika i za objektom j (alokacijske promenljive);

a_i - lokacije korisnika, $i = 1, \dots, m$.

w_i - težinski koeficijent i -tog korisnika.

Skup ograničenja označava da potrebe korisnika u celosti moraju biti zadovoljene. Funkcija cilja daje ukupnu cenu prevoza sistema. U slučaju snabdevanja samo jednom vrstom robe ("single commodity"), može se pokazati da se u optimalnom rešenju $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$, svaki korisnik snabdeva kod najbližeg snabdevača, tj. $y_{ij} \in \{0, 1\}$.

Primer 7. Na Slici 14a date su lokacije 19 korisnika (u zgradama) i količina njihovih zahteva (težine) za robom. Na primer, 7.1 (20, 81) označava da zahtev korisnika lociranog u (20, 81) iznosi 7.1 kg. Treba odrediti u ravni lokacije tri distributivna centra, tako da zahtevi svih korisnika za robom budu zadovoljeni, a da težinski zbir rastojanja od svakog korisnika do distributivnog centra bude minimalan. Na slici 14 (b) dato je optimalno rešenje. Sa + su označene lokacije centara. Potrošači su podeljeni (alocirani) u tri grupe (dve sa pet potrošača i jedna sa devet). Vrednost funkcije cilja u toj tački je 15203 kg-km.



Slika 14 (Love id r. 1989) Primer lokacijsko-alokacijskog zadatka i optimalno rešenje za $p=3$.

Iako na prvi pogled lokacijsko-alokacijski model izgleda jednostavniji od modela višeobjektnog lociranja, on se daleko teže može rešiti. Broj promenljivih je sada $m \cdot p$ - alokacijskih i $n \cdot p$ - lokacijskih. Pored toga, funkcija cilja nije konveksna, o čemu govori sledeći stav.

Stav 19. $f_{LA}(x)$ nije ni konveksna ni konkavna.

Dokaz. Po poznatom stavu iz NP funkcija nije ni konveksna ni konkavna ako njena Hesijan matrica H (matrica parcijalnih izvoda drugog reda) nije ni pozitivno ($H > 0$) ni negativno definitna ($H < 0$). Po drugom poznatom stavu, matrica je pozitivno (negativno) definitna ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni (odnosno naizmenično pozitivni i negativni).

Dovoljno je dakle dokazati da bilo koji glavni minor (determinanta) matrice H , pa i minor drugog reda ne mora biti pozitivan za svako $(x, y) \in R^{q(m+n)}$, ako je već minor prvog reda pozitivan (za negaciju pozitivne definitnosti) ili ako je minor prvog reda negativan (za negaciju

negativne definitnosti). Tehničke detalje dokaza (nalaženje drugih izvoda od $f_{LA}(x, y)$) prepuštamo čitaocu. ♦

Kako $f_{LA}(x, y)$ nije ni konveksna ni konkavna, ona ima više lokalnih minimuma, pa lokacijsko-alokacijski problem spada u domen globalne optimizacije i tačno rešenje je moguće dobiti samo za probleme malih dimenzija ($m \leq 50$). Kako u realnim problemima broj korisnika može biti više hiljada, to je pažnja istraživača usmerena na heurističke (aproksimativne ili približne) metode. Karakteristika ovog problema je veliki broj lokalnih minimuma različitog kvaliteta, pa je iz tog razloga često korišćen u testiranju novo predloženih metoda globalne optimizacije (videti npr. Tuy () za testiranje d-c tehnike). Eilon i Watson-Gandy su na problemu sa $m = 50$ i $p = 5$ registrovali 61 lokalni minimum sa razlikom između najbolje i najlošije vrednosti od 40.9%. Tih 61 minimuma je dobijeno primenom Kuperovog algoritma (1964) sa 200 slučajno generisanih početnih rešenja, koga ćemo sada izložiti.

6.1. Alternativna heuristika Cooper (1964). Alternativne metode nisu retke i mogu se sresti u raznim oblastima numeričke matematike. U nima se prvo jedan skup promenljivih privremeno fiksira kako bi se neki složen numerički problem pojednostavio. Dobijena rešenja za nefiksirane promenljive se zatim fiksiraju, pa se rešava problem po promenljivim koje su ranije bile fiksirane. Ovo naizmenično rešavanje dva problema se nastavlja sve dok se konačno rešenje ne može popraviti, odnosno procedura se završava kada su dva uzastopna rešenja (i po jednoj i po drugoj grupi promenljivih) proizvoljno bliska. Naravno, neophodno je i dokazati konvergenciju ovakvog postupka. Ako je problem koji se rešava iz klase globalne optimizacije, Alternativna metoda je približna, dakle heuristička. Ona može voditi i do egzaktnog rešenja, što je na primer slučaj s poznatom Gaus-Zajdelov-om metodom rešavanja linearnih jednačina.

Alternativna heuristička procedura za rešavanje lokacijsko-alokacijskog zadatka naizmenično (alternativno) rešava lokacijski i alokacijski problem, dok se ne dobije lokalni minimum, odnosno rešenje koje se ponavljanjem gornjih procedura više ne može popraviti. Drugim rečima skup promenljivih je podeljen na prirodan način: na lokacijske x_j i alokacijske y_{ij} .

Algoritam 9 (*Alternativna heuristika*)

Korak 1: Iniciranje. Izabрати lokacije (proizvoljno) q tačaka (snabdevača) $x_1, x_2, \dots, x_q$. Brojač iteracija je na 1.

Korak 2: Alokacijski problem. Pridodeliti svakom korisniku najbližeg snabdevača, odnosno naći ($y_{ij} \in \{0, 1\}$).

Korak 3: Kriterijum završetka. Ako nema promena u ovom pridodeljivanju u odnosu na prethodnu iteraciju, kraj.

Korak 4: Lokacijski problem. Rešiti Veberove probleme za svaku grupu potrošača, vezanu za snabdevanje u x_j . Te tačke obeležiti sa $x_1, x_2, \dots, x_q$, pa preći na Korak 2.

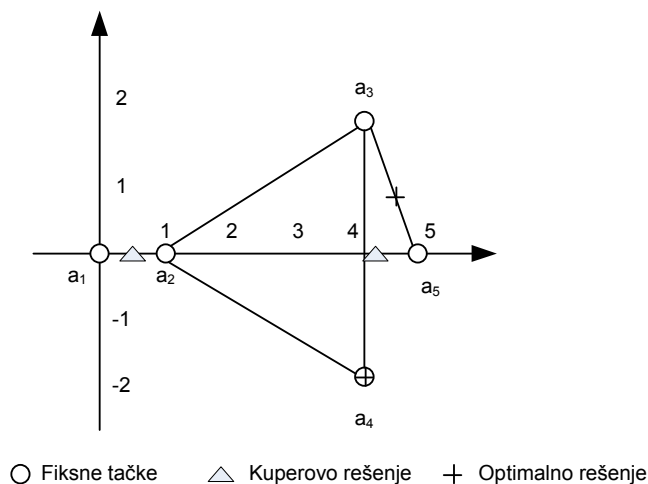
Iako alternativne metode rešavanja različitih problema imaju slične osobine, one se na žalost u različitim disciplinama nezavisno razvijaju i često nazivaju drugačijim imenima.

Tako se na primer procedura ovog tipa u *Klaster analizi* naziva *C-Means*, *H-Means* ili *Fuzzy C-Means*; za rešavanje problema nalaženja *p-Medijana* ova Alternativna metoda se naziva Maranzanina metoda; za rešavanje zadatka bilineranog programiranja, metoda alternativnog tipa se naziva *Rekurzivna*; U Statistici se metoda naziva *EM* (Expectation Maximum), itd.

Mali pomak u sagledavanju nekih mogućih zajedničkih osobina metoda alterativnog tipa saopšten je u radovima Mladenovića i Brimberga (1996) i Brimberga i Mladenovića (1999), gde je pokazano da se Kuperovom heuristikom mogu dobiti rešenja sa manje od p novih lokacija, nezavisno od načina izbora početnog rešenja. Takva rešenja su nazvana *degenerisana*, jer je jasno da ona ne mogu biti optimalna; da bi se dobilo rešenje bolje od degenerisanog, dovoljno je novom snabdevaču dodeliti lokaciju bilo kog “nezauzetog” korisnika, odnosno korisnika čija lokacija već nije okupirana nekim snabdevačem.

Stav 20. Za inicijalnu particiju skupa potrošača u p grupa ($p \geq 3$), Kuperovom metodom se može dobiti degenerisano rešenje.

DOKAZ. Lako je pokazati da se za $p=2$ ne može dobiti degenerisano rešenje pomoću Alternativne heuristike, jer svi potrošači ne mogu biti u istoj grupi ako sun a startu već bili podeljeni u dve grupe. Za $p \geq 3$ dokaz izvodimo kontra primerom. Na slici 15 dat je primer degenerisanog rešenja dobijenog Kuperovom metodom za $m=5$, $p=3$ i $w_i=1$.



Slika 15. Primer degenerisanog rešenja dobijenog Kuperovom metodom za $m=5$, $p=3$ i $w_i=1$ koje umesto tri, ima dve nove lokacije.

Fiksne tačke imaju koordinate: $a_1=(0,0)$; $a_2=(1,0)$; $a_3=(4, \sqrt{3})$; $a_4=(4, -\sqrt{3})$; $a_5=(4.75,0)$. Pretpostavimo da je početno rešenje za Kuperov algoritam dato tako da se korisnik a_1 opslužuje u prvoj novoj tački, a_2, a_3 i a_4 u drugoj i a_5 u trećoj. Lokacije te tri nove tačke su očigledno $x_1=a_1=(0,0)$, $x_2=(3,0)$ i $x_3=a_5=(4.75,0)$. Alociranjem korisnika svom najbližem snabdevaču x_j (korak 2 Kuperova procedure), korisnik lociran u a_2 se pridružuje prvom snabdevaču, dok se oni iz a_3 i a_4 pridružuju trećem, tj. tački a_5 . Dakle, x_2 nije više u upotrebi jer su se korisnici a_1 i a_2 grupisalo oko prvog snabdevača x_1 , a ostalih tri oko trećeg. Rešavanjem Veberovih zadataka za ove dve grupe, dobijaju se rešenja $x_1=(0,0.5)$ i $x_2=(0,4.25)$. Kako se ponovnim rešavanjem alokacijskog zadatka ovo rešenje neće promeniti, zaključujemo da alternativna heuristika zaustavlja u degenerisanom rešenju.

Interesantno je i pitanje stepena degenerisanosti dobijenog rešenja, odnosno za koliko je u rešenju bilo manje novih lokacija od traženog broja p . Nedegenerisano rešenje je valjano, pa je stepen

degenerisanosti valjanog rešenja jednak 0. U radovima Mladenovića i Brimberga (1996) i Brimberga i Mladenovića (1999) pokazano je da stepen degenerisanosti raste sa p . Neki eksperimentalni rezultati dobijeni Kuperovom metodom na klasičnom test primeru sa 50 korisnika i različitim brojem novih objekata (Eilon i dr. (1971)), dati su u tabeli 1.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	100	0	0	0	0	0	0	0	0
8	100	0	0	0	0	0	0	0	0
12	87	12	1	0	0	0	0	0	0
16	54	38	6	2	0	0	0	0	0
20	13	34	26	22	5	0	0	0	0
24	3	17	26	30	15	8	1	0	0
28	1	8	16	32	25	12	6	0	0
32	0	5	19	7	30	22	13	2	2
36	0	2	11	23	29	21	3	1	0

Kolone u tabeli 1 označavaju stepen degenerisanosti, dok vrste daju zahtevani broj novih objekata p . Eksperiment se sastojao u ponavljanju sledećeg eksperimenta 100 puta: za svako p početno rešenje je generisano na slučajan način, pa je zatim primenjena Kuperova heuristika. Dakle, za 4 i 8 novih objekata, svih 100 ređenja je bilo valjano; za na primer $p=20$, 13 rešenja je bilo valjano, 34 rešenja je umesto 20 novih objekata našlo 19 (stepen degenerisanosti jednak 1), s 26 rešenja su predložene lokacije 18 novih objekata, 22 puta je je stepen degenerisanosti bio 3, itd. Interesantan je podatak da se za $p=32$ i za $p=36$ nije dobilo nijedno valjano rešenje. Jednostavna modifikacija po kojoj se, u slučaju pojave degenerisanog rešenja, novi objekti (dopuna do p) ubacuju na mesto izabranih fiksnih objekata čime se očigledno poboljšava kvalitet rešenja (i do 50% za veliko p), redložena je u Brimberg i Mladenović (1999).

6.2. p -Median heuristika. U radu u kome je predložio *Alternativnu* heuristiku, Kuper je pomenuo i nekoliko drugih približnih metoda rešavanja lokacijsko-alokacijskog zadatka. Ona koja je davala najbolje rezultate, ali je bila eksponencijalne složenosti pa je zato kasnije zanemarivana, sastojala se u izboru novih u postojećim lokacijama, odnosno u prebrojavanju svih $\binom{m}{p}$ kombinacija. Nedavno su Hansen, Mladenović i Taillard (1998) identifikovali ovu

Kuperovu karakteristiku kao problem p -medijana (ili p -težišta) i primenili savremene egzaktnu i približnu metode rešavanja problema p -težišta u prvom koraku (videti Hansen i Mladenović (1997)), a zatim za svaki od p centara i njima najbližih korisnika, rešili Veberov problem. Tako dobijena rešenja su na nekim klasičnim test primerima iz literature bila daleko bolja i od modifikovane Kuperove metode (npr. za $m = 287$ i $p = 50$, dobijeno rešenje je bilo duplo manje).

6.3. Meta-heurističke metode. U rešavanju LA problema oprobane su i neke metaheuristike: (i) *genetski algoritam* u Brimberg i dr. (2000), (ii) *tabu traženje* u Brimberg, Mladenović (1996a) i Brimberg i dr. (2000), (iii) *metoda promenljivih okolina* u Brimberg, Mladenovic (1996b) Mladenović, Hansen (1997) i Hansen i Mladenović (2003).

Metaheuristički pristup rešavanju problema kombinatorne i globalne optimizacije u načelu popravljaju rešenja dobijena lokalnim pretraživanjima. U opsežnom radu Brimberga i dr. (2000)

preko deset heurističkih i meta-heurističkih metoda je upoređeno na istim test primerima, istom računaru i za isto procesorsko vreme. Najbolji rezultati su (u srednjem) dobijeni su metodom *promenljivih okolina* i varijantom metode *tabu traženja*, tzv. *lančanom zamenom mesta* (chain-interchange) (Mladenović i dr. (1996)).

6.4. LA model ograničenih kapaciteta. Od velikog broja mogućih proširivanja ovog osnovnog modela, pomenućemo onaj u kome su kapaciteti snabdevača (novih objekata) ograničeni (*capacitated*). Matematički model ima sledeći oblik:

$$(\min) f(c, x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j)$$

$$\sum_{j=1}^p y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} \cdot n_i \leq \bar{n}_j, \quad j = 1, \dots, p$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1$$

gde su

- n_i - broj korisnika u tački a_i
- $\bar{n}_j$ - maksimalan kapacitet snabdevača x_j .

Izraz $y_{ij}n_i$ predstavlja dakle količinu proizvoda koju je korisnik i dobio od novog objekta (distributivnog centra) j . U ovom modelu pretpostavljeno je da je kapacitet j -tog novog objekta ograničen. Cooper (72) je predložio metodu "alternativnog tipa", u kojoj se u Koraku 2 umesto alokacijskog rešava transportni problem.

6.5 Model sa konstantnim fiksnim troškovima (FT). Varijanta osnovnog LA modela odnosi se na realniju pretpostavku da broj novih lokacija p nije poznat. Pri tome se u model uvode i dati fiksni troškovi otvaranja nove lokacije F , jer da ih nema, broj novih lokacija u optimalnom rešenju bi naravno bio 0. Ovaj model, koga ćemo označiti sa FT, predložen je u radu Brimberg, Mladenović i Salhi (2003) i ima sledeći oblik:

$$(\min) f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j) + pF$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^p y_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, p.$$

Funkcijom cilja ovog modela određuju se ukupni troškovi transporta od korisnika do snabdevača ili centara, dok se skupom ograničenja obezbeđuje ispunjenje svih zahteva korisnika. Janso je da se zapravo traži optimalan balans između cene izgradnje novog objekta F i njihovog broja p .

Ako pretpostavimo da p novih lokacija treba izabrati među lokacijama m korisnika, tada se gornji kontinualni model transformiše u dobro poznati diskretni *jednostavni lokacijski problem* (JLP):

$$(\min) f(x, y) = \sum_{j=1}^n F_j z_j \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot y_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1,$$

$$0 \leq y_{ij} \leq z_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

gde je F_j cena postavljanja (izgradnje) j -te lokacije, $c_{ij} = w_i d(a_i, x_j)$ cena (ili rastojanje) između korisnika i potencijalnog snabdevača, dok z_j predstavlja 0-1 promenljivu koje imaju vrednost 1 ako je izabrana lokacija j -tog korisnika kao mesto gde će se otvoriti novi centar. Za diskretni JLP model, jasno je da će se svaki korisnik snabdevati u najbližem otvorenom centru, odnosno lako je dokazati sledeći stav.

Stav 21. *Ako je (Z^*, Y^*) optimalno rešenje jednostavnog lokacijskog problema, tada je $y_{ij} \in \{0, 1\}$*

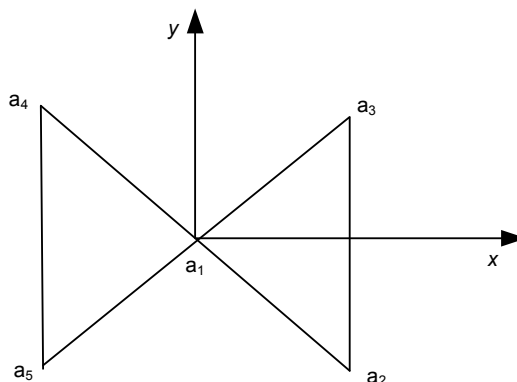
Budući da u literature za JLP postoji veliki broj efektivnih metoda, to Brimberg, Mladenović i Salhi (2003) istražuju veze između FT i JLP, kako bi se kontinualni problem eventualno približno rešio primenom diskretnih metoda.

Stav 22. *Neka su p_1 i p_2 optimalan broj novih objekata u kontinualnom (FT) i diskretnom (JLP) problem respektivno. Tada su moguće sve tri relacije između p_1 i p_2 , odnosno p_1 može biti veće, jednako ili manje od p_2 .*

DOKAZ. Ovo trđenje dokazaćemo kontraprimerom. Posmatrajmo slučaj s pet datih tačaka u

ravni sa sledećim koordinatama: $a_1(0,0)$, $a_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $a_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $a_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, a_5

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ datih na slici 16.



Slika 16. Primer za dokaz stave 22.

Pretpostavimo da su težine pridodeljene svim korisnicima jednake 1, tj. $w_i=1$, za $j=1, \dots, m$. Optimalna rešenja i za diskretni JLP i kontinualni FT model data su u tabeli 2.

Tabela 2

p	Diskretni JLP	Kontinualni FT
1	$4+F$	$4+F$
2	$3+2F$	$(1+\sqrt{3})+2F$
3	$2+3F$	$\sqrt{3}+3F$
4	$1+4F$	$1+4F$
5	$5F$	$5F$

Za diskretni slučaj nije potrebno razmatrati vrednosti 2, 3 i 4 za p jer je $p_2=5$, za $0 \leq F \leq 1$, a za $F>1$ važi $p_2=1$

$$p_2 = \begin{cases} 5, & 0 \leq F \leq 1 \\ 1, & F > 1 \end{cases}$$

U kontinualnom slučaju važi sledeće:

$$p_1 = \begin{cases} 5, & 0 \leq F \leq \sqrt{3}/2 \\ 3, & \sqrt{3}/2 < F \leq 1 \\ 2, & 1 < F \leq 3-\sqrt{3} \\ 1, & F > 3-\sqrt{3} \end{cases}$$

Dakle,

- (a) $p_1 < p_2$, ako je $\sqrt{3}/2 < F < 1$;
- (b) $p_1 > p_2$, ako je $1 < F < 3-\sqrt{3}$
- (c) $p_1 = p_2$, u svim ostalim slučajevima

Time je dokaz završen.

Sledeći stav, koji nećemo dokazivati (videti Brimberg, Maldenović Salhi (2003)), daje uslove po kojima su rešenja kontinualnog i diskretnog modela lokacije asimptotski (u beskonačnosti) jednaka.

Stav 23. Neka su m lokacija korisnika generisane na jediničnom kvadratu sa ravnomernom raspodelom i neka su težine generisanih tačaka $w_j=1/m$, $j=1, \dots, m$. Tada za $m \rightarrow \infty$, $p_1=p_2$.

Koristeći stavove 22 i 23, u gornjem radu je predložena više-etapna heuristika bazirana na metodi Promena okolima razvijenom za rešavanje diskretnog JLP-a (Hansen, id r. (2003)), na kojoj se nećemo zadržavati.

6.6. Model lančanog snabdevanja (Supply chain management). Drugo moguće proširenje uključuje u model i snabdevače novih distributivnih centara, ili fabrike. Za njih se pretpostavlja da su u datim (njih $q < p$) i da imaju neograničen kapacitet. Treba odrediti lokacije p novih distributivnih centara tako da ukupna cena transporta (ili ukupno rastojanje) od korisnika do centra i od snabdevača do centra bude minimalna. Donosioc odluke mora balansirati svoje (tj, od fabrike do distributivnog centra) i troškove korisnika. Naravno, ako su troškovi korisnika veliki, centar će imati manji promet.

U cilju formulisanja matematičkog modela, uvešćemo i sledeće oznake:

q – broj snabdevača (fabrika);

$b_k, k=1, \dots, q$ – poznate lokacije snabdevača;

z_{kj} – promeljiva koja određuje količinu robe koju treba transportovati od fabrike k do centra j ;

$\lambda \in [0,1]$ – parametar kojim se određuje odnos troškova koje imaju korisnici i distributivni centri;

za $\lambda = 1$, donosioc odluke ne uzima u obzir svoje troškove.

Model ima sledeći oblik:

$$(\min) f(x, y, z) = \lambda \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j) + (1 - \lambda) \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p z_{kj} \cdot d_i(b_k, x_j)$$

p.o.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p y_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m y_{ij} \cdot n_i &\leq \sum_{k=1}^q z_{kj}, \quad j = 1, \dots, p \\ 0 &\leq y_{ij} \leq 1 \end{aligned}$$

Novo ograničenje je takozvano *tranzitno* ili *protočno* ograničenje koje kaže da količina robe koja uđe u centar mora biti veća ili jednaka od količine koja iz njega izađe.