Kontinualni lokacijski modeli

Uvod

Najčešća podela matematičkih modela:
1. Diskretni
2. Kontinualni
3. Mrežni

Matematički modeli nam daju odgovore na sledeća pitanja:
1. Koliko novih objekata treba otvoriti
2. Gde će biti locirani
3. Koliko će biti veliki

Opšte karakteristike

- Objekti su locirani u ravni ili u prostoru
- Nepoznate se nalaze u kontinualnom prostoru
- Dopustivi skup ima beskonačno mnogo tačaka

- Oblik funkcije cilja
- Broj novih objekata
- Lokacijski problemi privatnog i javnog sektora

Lokacija jednog objekta (Veberov model)

- Polje mogućih novih lokacija je kontinuum.
- Treba izabrati tačku u ravni kojom se dostiže min ili max nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno.
- Formulacija Veberovog problema: dato je m tačaka u ravni a1,a2...am i m skalara(težina) dodeljenih svakoj tački (w1...wm).
- Treba naći tačku X kod koje je suma težinskih rastojanja do datih tačaka minimalna.

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot d(x, a_i),$$

gde su

- $x = (x_1, x_2)$ - koordinate nepoznate lokacije;
- m - broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,
- $d(x, a_i)$ - rastojanje i-tog korisnika do nepoznate lokacije,
- n_i - broj elemenata i -tog korisnika,
- r_i - jedinična cena prevoza i-tog korisnika,
- $w_i = n_i r_i$ - težinski koeficijenti pridodeljeni i-tom korisniku,
- $a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate (lokacije) i-tog korisnika,
- f_w - funkcija cilja Veberovog problema.


UŠĆE SHOPPING CENTER


DeltaCity

Merenje rastojanja

1. Euklidova metrika

Ako x i z pripadaju R^n , tada je Euklidovo rastojanje dato sa:

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2} = \| x - z \|_2$$

Funkcija cilja ima oblik:

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(x, a_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^{(i)})^2 \right)^{1/2}$$

- Ako je niz tačaka a_i u R^2 dužine m tada je funkcija f_W konveksna.
- Ova funkcija nije glatka(parcijalni izvodi su prekidna funkcija).
- Kod rešavanja problema ovom metrikom prvo se proverava da li je optimalna lokacija u nekoj od fiksnih tačaka, u suprotnom primenjuje se neka metoda bezuslovne minimizacije koja ne zahteva glatkost.

- Vrlo lako se funkcija može transformisati u glatku funkciju uz pomoć hiperboliske transformacije:

$$d^H(x,z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon}$$

- Numerička nestabilnost

- Numeričko rešavanje sistema nelinearnih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^i)}{d(x, a_i)} = 0,$$

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{a_j^{(i)} \cdot w_i}{d(x, a_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(x, a_i)}}$$

2.Pravougaona metrika

- Rešavamo dva nezavisna zadatka sa po jednom promenljivom, odnosno problem svodimo na dve minimizacije po jednoj promenljivoj
- Iz (min)$f_1(x_1)$ dobija se X1*, a iz (min) $f_2(x_2)$ dobija se X2*
- Rešenje polaznog Veberovog problema je tačka $X^*=(x_1^*, x_2^*)$

Funkcija cilja

$$
\begin{aligned}
f_w(x) &= \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (|x_1 - a_1^{(i)}| + |x_2 - a_2^{(i)}|) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} w_i |x_1 - a_1^{(i)}| + \sum_{i=1}^{m} w_i |x_2 - a_2^{(i)}| = \\
&= f_{w1}(x) + f_{w2}(x)
\end{aligned}
$$

Rastojanje

$$d_i(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_j - a_j^{(i)}|, \ i = 1, \ldots, m.$$

Algoritam

- Date su tačke $A_i=(a_1^i, a_2^i)$ i težinski koeficijenti W_i, $i=1,...,m$
- Postupak:

Sortirati koordinate tačaka A_i, $i=1,...,m$ u neopadajući niz. Pretpostavlja se da index (i) raste po sortiranom redosledu:
$a_j^1 \leq a_j^2 \leq ... \leq a_j^m$.

Moguća su dva slučaja :

I. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\sum wi < ½ \sum wi < \sum wi$ pri čemu za k=1 leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $xj^* = aj^k$

II. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $½ \sum wi = \sum wi$ tada je rešenje višestruko, tj. tražena koordinata xj^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[aj^k, aj^{k+1}]$.
Primenjujući ovaj algoritam za j=1, a zatimza j=2 dobijaju se obe koordinate tačke X*

Lokacija jednog objekta- lokacijska ograničenja

Ako postoje neke lokacije u kojima se ne može graditi novi objekat tada govorimo o lokacijskim ograničenjima. Skup dopustivih lokacija obeležićemo sa D.

$$\min fw(x) = \sum w_i d(x, a_i)$$

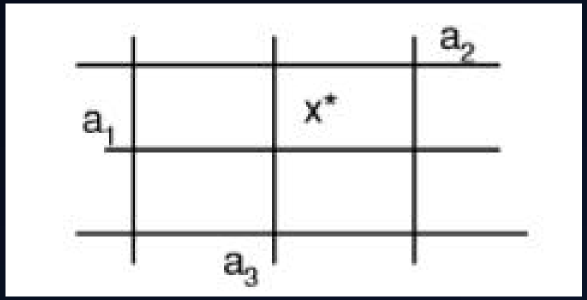
Korak 1. Naći bezuslovni minimum i obeležiti ga sa x;
Korak 2. Proveriti da li je tačka x –dopustiva, ako jeste, kraj;
Korak 3. Uvodi se koncept vidljivosti, tj. nalazi se podskup dopustivog skupa koji je vidljiv iz x.
Korak 4. x* je najbliža sa x, a pripada podskupu određenom u Koraku 3 (tj. x* je najbliža dopustiva, a vidljiva iz x).

Lokacija jednog objekta- nelinearna zavisnot funkcije cilja od rastojanja

- Iako je f(x) nelinearna funkcija, u proširenom modelu je zavisnost funckije od rastojanja linearna

- Ako obeležimo sa yi=di(x), tada je linearna funkcija po y $f(y) = \sum_{i=0}^{m} w_i y_i$

- Primer: uvođenje fiksnih troškova transporta u model
- Sve optimalne lokacije pripadaju tačkama preseka pravih paralelnih osama. Koristeći ovaj stav moguće je kontruisati proceduru nalaženja optimalnog rešenja probrojavanjem svih tačaka preseka pravih.



Veliki kvadrat-mali kvadrat

Korak 1: Izabrati početnu tačku $x_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ koja pripada konveksnom omotaču (KO) i naći $\bar{f} = f(x_0)$

Korak 2: Podeliti konveksni omotač KO $(a_1, \dots, a_m)$ na zone (kvadrate) i naći donju granicu svake od zona, tj.

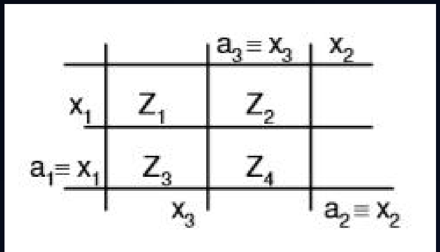
$$\underline{f}_{z_j} = \sum_{i=1}^{m} C_i[d_i(Z_j)]$$

gde je dijametar $d_i(Z_j) = (\min)\, d(a_i, Z_j)$ - najkraće rastojanje između a_i i zone Z_j.

Korak 3: Eliminisati sve zone Z_j za koje važi $\underline{f}_z > \bar{f}$.

Korak 4: ako je dijametar ne eliminisanih zona manji od proizvoljno malog broja ε, kraj.

Korak 5: izračunati vrednosti f u proizvoljnim tačkama ne eliminisanih zona (na primer u centru) i onu gde je f najmanja označiti sa $\bar{f}$. Podeliti preostalu oblast na još manje zone tj. preći na korak 2.



Lokacija jednog objekta- lokacija neželjenog objekta(anti Weber)

- U urbanim sredinama čest je problem određivanje deponija za gradsko đubre, automobilskih i drugih otpada.
- Tada treba naći lokaciju neželjenog objekta koji će biti udaljen od mesta u kojima ljudi žive,a opet u okviru opštine ili države dovoljno blizu, kako bi cena transporta bila manja

$$(\min)\ f_D(x) = \sum_{i=1}^{m} D_i[d_i(x)],\ \ x \in S$$

S – skup dozvoljenih lokacija;
x – nepoznata lokacija;
D_i - opadajuća, i neprekidna nelinearna funkcija od rastojanja;

- Traži se lokacija neželjenog objekta tako da ukupna ˝šteta˝ f(x) (u odnosu na postojeće objekte) bude minimalna

Rauslov problem, Min-Max kriterijum

- Veberov model zapostavlja izolovane korisnike usluga, odnosno Veberova tačka je najbliža ˝prosečnom korisniku˝. Iz tog razloga Rauls je predložio ravnopravno tretiranje i naseljenih i nenaseljenih mesta u izbor nove lokacije.

Primer: bolnica, stanica hitne pomoći

- Umesto Min-Sum predložen je Min-Max kriterijum po kome se minimizira težinsko rastojanje između novog i postojećeg objekta

$$(\min) f_R(x) = \max_i w_i d_i(x) \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Ukoliko su težinski koeficijenti jednaki 1: $(\min) f_R(x) = \max_i d_i(x) \quad i = 1, \ldots, m$

Rešavanje Raulsovog problema

Korak 1: Konstruisati konveksni omotač H, skupa tačaka $A = \{a_i, i = 1,\ldots,m\}$.

Korak 2: Izabrati bilo koja dva temena iz skupa A, i obeležiti ih sa a i b.

Korak 3: Tačke a i b određuju prečnik kruga. Ako sve tačke iz A pripadaju krugu, tj.

$$H \subset K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \text{ tada je } x^* = \frac{a+b}{2}, \text{ kraj;}$$

ako nije izabrati bilo koju tačku $c \in A$ van kruga K.

Korak 4: ako je trougao abc pravougli ili tupougli, obeležiti temena najveće stranice sa a i b pa preći na Korak 2; ako je trougao oštrougli, opisati krug (centar x) oko trougla abc; ako sve tačke $a_i,\ldots,a_m$ pripadaju krugu (lopti), tada je $x^* = x$ i kraj;

Korak 5: izabrati tačku a van kruga, a sa b označiti tačku trougla najdalju od a. Povući pravu $\overline{0b}$ i sa c označiti tačku trougla sa druge strane prave od a, pa preći na Korak 3.

Veber-Raulsov problem

- U realnim situacijama kompromis između Veberovog i Raulsovog problema je dvokriterijumski zadatak gde je f=(f_w,f_r)
- Ukoliko se traži Pareto-optimalno rešenje, predložen je sledeći algoritam:

Korak 1: Rešiti Veberov problem $f_w(x)$; obeležiti sa x' optimalno rešenje;

Korak 2: Izračunati $f_r(x')$; obeležiti sa f' dobijenu vrednost;

Korak 3: $f' = f' - h$, gde je h - korak, fiksni mali broj;

Korak 4: Umanjiti proporcionalno sa h u odnosu na f' sve $d_i(x)$ i obeležiti ih sa r_i, tj.

$$r_i = d_i(x') \cdot \frac{f' - h}{f'}$$

Korak 5: Opisati krugove sa centrima u a_i i poluprečnicima r_i ($K_i(a_i, r_i)$).

Korak 6: Ako je presek krugova prazan skup x' je Pareto optimalno rešenje i kraj. U suprotnom rešiti Veberov problem sa lokacijskim ograničenjima koja su predstavljena kao presek krugova, obeležiti dobijeno rešenje sa x' pa preći na korak 2.

Lokacija više objekata

- Češći slučaj u praksi
- Kod lokacije više objekata pojavljuju se sledeća pitanja:

  - koji je optimalni broj novih objekata

  - koji korisnici su usluženi od kog snabdevača

  - koja je uloga interakcije između snabdevača
- Razlikujemo one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija i one kod kojih međusobna veza ne postoji

- Min-Sum (Veberov problem lokacije više objekata)
- Min-Max lokacijski problem sa više novih objekata
- Lokacija p neželjenih objekata

  Max-min-min (p-Disprezioni problem)

  Pakovanje krugova u krug

  Max-sum-sum (p-odbrambenih problem

Min-Sum (Veberov) problem lokacije više objekata

$$(\min) f_M(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} d_i(x_j) + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^{q} v_{jk} d(x_j, x_k)$$

m - broj fiksnih (postojećih) objekata,
q - broj novih objekata,
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ - nepoznate lokacije novih objekata,
$x_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ - $j = 1, \ldots, q$, koordinate nepoznatih objekata,
v_{jk}, $j, k = 1, \ldots, p$ - mera interakcije izmedju novih objekata j i k (odnosno cena),
gde je $v_{jk} = v_{kj}$,
w_{ij} - cena jediničnog transporta od korisnika i do nove lokacije j,
$d_i(x_j) = d(x_j, a_i)$ - rastojanje između korisnika i j-te nove tačke,
$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate i-tog korisnika.

Lokacija p neželjenih objekata

- Cilj je da novi objekti budu što dalji jedni od drugih
- Ne figuriše se postojeći oblik, data je samo oblast i broj lokacija p
- Imamo četiri modela ovog tipa:

1. Max-min-min
2. Max-min-sum
3. Max-sum-min
4. Max-sum-sum

a) $\max_{x \in S} (\min_i \min_j d(x_i, x_j))$

b) $\max_{x \in S} (\min_i \sum_{j=1}^{p} d(x_i, x_j))$

c) $\max_{x \in S} \sum_{i=1}^{p} \min_j d(x_i, x_j)$

d) $\max_{x \in S} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} d(x_i, x_j)$

Max-min-min(p-disperzioni problem)

- Povezan je sa klasičnim matematičkim zadatkom pakovanja krugova jednakih poluprečnika u kvadrat
- Može se predstaviti i kao zadatak nelinearnog programiranja:

Max r

Po ograničenjima

$$d(x_i, x_j) \geq r \text{, za svaki i,j} = 1,\ldots,\text{p } i \neq j$$

$$x_i \in S$$

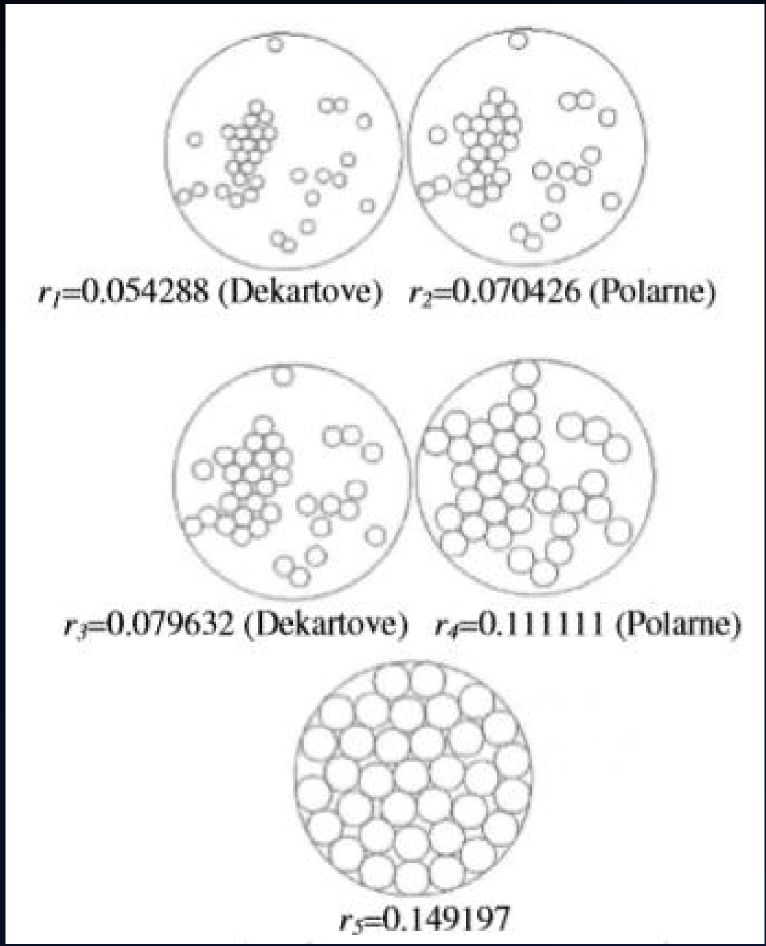
Pakovanje krugova u krug

- Reformulacioni spust

- Korak 1. Konstruisati namanje dve nelinearno povezane formulacije problema;
- Korak 2. Izabrati početno rešenje Z;
- Korak 3. Ponavljati sledeće korake po svim definisanim formulacijama:

(a) naći stracionarnu tačku Z` primenom neke NP metode, čije je početno rešenje Z;

(b) ako je Z` bolje od Z, tada je Z= Z`; vratiti se na korak 3, tj. na prvu formulaciju



Lokacijsko –alokacijski problem

- U praksi je čest slučaj da su wij i vjk nepoznate
- Ograničavamo se na najjednostavniji lokacijsko-alokacijski model, koji se sastoji:

-ne postoje interakcije između novih objekata
-broj novih objekata je unapred zadat
-korisnici se snabdevaju jednom vrstom robe
-kopacitet novih lokacija nije ograničen

$$(\min) f_{LA}(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{p} y_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,m$$

$$0 \le y_{ij} \le 1,\ i = 1,\dots,m,\ \text{i}\quad j = 1,\dots,p.$$

$d_i(x_j) = d(a_i, x_j)$

p - broj novih objekata (nepoznatih)

m - broj korisnika (grupa korisnika)

x_j - nepoznate lokacije novih objekata, $j = 1,\dots,p$ (lokacijska promenljiva)

y_{ij} - promenljiva koja određuje proporciju zahteva korisnika i za objektom j (alokacijske promenljive);