Kontinualni lokacijski modeli

Sanja Novaković 658/14
Milena Nikolić 758/14
Dušan Sekulović 692/14

Modeli

- Matematički modeli lokacije najčešće se dele na kontinualne, diskretne i mrežne
- Kod kontinualnih se nepoznate promenljive nalaze u kontinualnom prostoru
- Matematički modeli teorije lokacije imaju za cilj da odgovore na neka od pitanja(koliko novih objekata treba otvoriti, gde, koliko veliki će biti svaki od otvorenih objekata itd.)

Klasifikacija lokacijskih problema i modela

- Topografija: kontinualni, diskretni i mrežni
- Po obliku fje cilja: Min-Sum i Min-Max
- Mogu biti i: statički i dinamički, jedno-kriterijumski i više-kriterijumski, jednorobni i višerobni, deterministički i stohastički

- Lokacijski modeli se mogu karakterisati i na osnovu broja objekata koje treba otvoriti
- Negde je broj unapred zadat (npr. u Veberovom i lokacijsko-alokacijskom kontinualnom problemu) i te modele nazivamo endogenim
- Kod egzogenih je broj novih servisa nepoznata veličina i njena vrednost se dobija kao rezultat optimizacije
- Kao primer egzogenih modela navešćemo "jednostavni lokacijski (ili zemljišni) problem" i problem prekrivanja skupa

Problem prekrivanja skupa

- Korak 1. Ako je Cj= 0 za svako j =1, 2,..., n,dodeliti jedinicu X_j= 1 i ukloniti sva ograničenja u kojima se Xj pojavljuje sa koeficijentom +1.

- Korak 2. Ako je C_j > 0, za bilo koje j =1, 2, ... , n , X_j, se ne pojavljuje sa koeficijentom +1 ni u jednom preostalom ograničenju, dodeliti mu vrednost X_j =0.

- Korak 3. Za sve preostale promenljive, utvrditi odnos cj/ dj, gde je dj broj ograničenja u kojima se xj pojavljuje sa koeficijentom +1. Promenljivoj k čiji je količnik (Ck/dk) najmanji, dodeliti xk=1 i ukloniti sva ograničenja u kojima se xk pojavljuje sa koeficijentom +1. Potom rešiti dobijeni model.

- Korak 4. Ako nema više ograničenja, svim ostalim promenljivama dodeliti vrednost 0, što označava i rešenje problema. Ukoliko imajoš ograničenja, ići na korak 1.

Min-Sum i Min-Max

- Min-Sum: minimizacija težinskog zbira svih rastojanja novih i fiksnih objekata
- Min- Max: minimizacija maksimalnog rastojanja između postojećih i nepoznatih objekata

Lokacija jednog objekta(Veberov problem)

- Kontinuum-polje mogućih novih lokacija (koordinata traženih tačaka)
- Treba izabrati tačke u ravni (ili prostoru) kojom se dostiže minimum ili maksimum nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno

Primer

- Ako imamo koordinate zgrada u nekom naselju u kome treba podići novu robnu kuću sa nepoznatim koordinatama , tada težinski koeficijenti koji se mogu pridodeliti zgradi, mogu predstavljati broj njenih stanovnika
- Funkcijom cilja se minimizuje težinski zbir rastojanja (ili cena prevoza) do nove robne kuće

- Matematički model

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot d(x, a_i) ,$$

gde su

$x = (x_1, x_2)$ - koordinate nepoznate lokacije;

m - broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,

$d(x, a_i)$ - rastojanje i-tog korisnika do nepoznate lokacije,

n_i - broj elemenata i -tog korisnika,

r_i - jedinična cena prevoza i-tog korisnika,

$w_i = n_i r_i$ - težinski koeficijenti pridodeljeni i-tom korisniku,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate (lokacije) i-tog korisnika,

f_w - funkcija cilja Veberovog problema.

Euklidova metrika

- U nelinearnom programiranju osnovno je pitanje da li je problem konveksan ili ne
- Nejednakost trougla tvrdi da stranica trougla ne može biti veća od zbira druge dve strane
- Problem nalaženja težišta ili centroida

Metode rešavanja problema sa Euklidovom merom rastojanja

- Prvo se fw(x) proveri da li je optimalna lokacija u nekoj od fiksnih tačaka, ako nije primeni se neka metoda bezuslovne minimizacije
- Korišćenjem hiperbolijske aproksimacije se može transformisati u glatku fju:

  $$d^H(x,z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon},$$

  gde je ε proizvoljno mali broj
- Drugi način nalaženja rešenja Veberovog problema je u numeričkom rešavanju sistema nelinearnih jednačina

Pravougaono rastojanje

- U gradskim uslovima, direktno rastojanje između novih i postojećih tačaka određeno Euklidovom metrikom, često je nerealno
- Problem svodi na dve minimizacije po jednoj promenljivoj
- Pravougaono i linijsko (Euklidovo) rastojanje su specijalni slučajevi P rastojanja
- Funkcija rastojanja od koordinatnog početka do bilo koje tačke u posmatranom prostoru se naziva **norma**

Rešavanje Veberovog problema sa pravougaonom metrikom

Ako su zadate tačke $A_i=(a_1^i,a_2^i)$ i težinski koeficijenti tih tačaka w_i, i=1,..,m algoritam za određivanje j-te koordinate je:

1.Sortirati koordinate tačaka A_i, i= 1, ..m u neopadajući niz. Dalje se predpostavlja da ideks (i) raste po sortiranom redosledu: $aj^1 \le a_j^2 \le \ldots \le a_j^m$. Moguća su dva slučaja:

2.Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < ½ \sum_{i=1}^{m} w_i < \sum_{i=1}^{k} w_i$ pri čemu za k=1

leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $x_j^* = a_j^k$.

3. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $½ \sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$ tada je rešenje

višestruko, tj. tražena koordinata x_j^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[a_j^k,a_j^{k+1}]$.

Primenjujući ovaj algoritam za j=1, a potom za j=2 dobijaju se obe koordinate tačke X*.

Veberovog problema

1. Izračunati međusobna rastojanja između svih m tačaka:

$$d(A_r, A_l) = \sqrt{(a_1^r - a_1^l)^2 + (a_2^r - a_2^l)^2}\ ,\ \forall\, r, l \in \{1,\ldots,m\}$$

2. Proveriti da li za neku tačku r koja pripada skupu {1,..m} važi:

$$c_r = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{wi(a_1^r - a_1^i)}{d(A_r, A_i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{wi(a_2^r - a_2^i)}{d(A_r, A_i)}\right)^2} \leq w_r$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neko r=> KRAJ. Rešenje se nalazi u tački A_r. U suprotnom, ići na sledeći korak.

3. Stavimo da je k = 0 i odredimo početno rešenje $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ po formuli:

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}\ ,\ j = 1, 2$$

4.Izračunati rastojanja između $X^k = (x_1^k, x_2^k)$ i zadatih tačaka:

$$d(X^k, A_i) = \sqrt{(x_1^k - a_1^i)^2 + (x_2^k - a_2^i)^2}\ ,\ \forall\, i \in \{1,..,m\}$$

5.Računamo po iterativnoj formuli:

$$x_j^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_j^i}{d(X^k, A_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(X^k, A_i)}}\ ,\ \ j = 1,\ 2$$

6.Ako je $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$, za svako j koje pripada skupu {1,2} => KRAJ. X^{k+1} se usvaja kao "dovoljno dobro" rešenje. U suprotnom, staviti k=k+1 i ići na korak 4.

Lokacija jednog objekta – Prošireni modeli

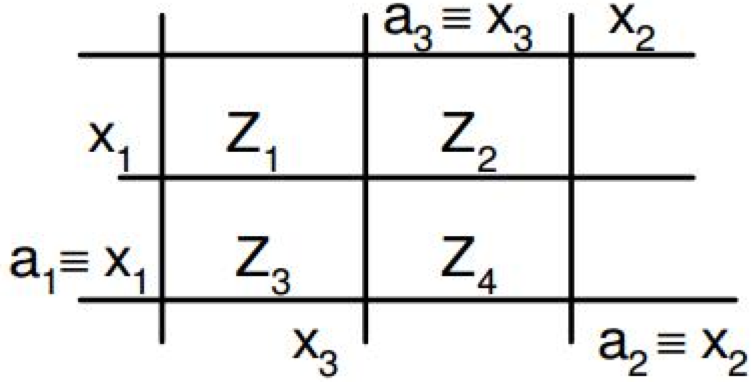
- Ako postoje neke lokacije u kojima se ne može graditi novi objekat tada govorimo o lokacijskim ograničenjima
- Za rešavanje ovog zadatka postoje 2 ili 4 koraka u zavisnosti od dobijenog rešenja

Veliki kvadrat-Mali kvadrat

1. Bira se tačka koja pripada konveksnom omotaču
2. Konveksni omotač se deli na zone, i nalazi se donja granica svake od zona(*dijametar*-najkraće rastojanje između a i zone)
3. Eliminisati sve zone za koje je donja granica podeljenih zona veća od gornje granice fje cilja
4. Ako je dijametar neeliminisanih zona manji od proizvoljno malog broja ε tada je kraj
5. Izračunati vrednosti f u proizvoljnim tačkama neeliminisanih zona i tamo gde je f najmanja označiti sa f nadvučeno, preostala oblast se deli na manje zone i prelazi se opet na korak 2

•Rešenje dobijeno ovom metodom je aproksimacija optimalnog rešenja

•problem maksimalnog potencijala



Slika 10. Ilustracija zona u metodi *Veliki kvadrat-mali kvadrat*

- Kao primer možemo uzeti otvaranje predstavništva firme u nekom gradu koji ima maksimalan potencijal ili maksimalnu interakciju
- U praksi obim kretanja između dva grada proporcionalan je količini i atraktivnosti ponude, a obrnuto proporcionalan stepenu rastojanja između njih

Lokacija neželjenih objekata(Anti Weber)

- U urbanim sredinama čest je problem određivanja deponija za gradsko đubre, automobilskih i drugih otpada

$$(\min)\ f_D(x) = \sum_{i=1}^{m} D_i[d_i(x)],\ x \in S\ ,$$

gde su

S – skup dozvoljenih lokacija;
x – nepoznata lokacija;
D_i - opadajuća, i neprekidna nelinearna funkcija od rastojanja;

- U anti-Veberovom problemu traži se dakle lokacija neželjenog objekta, tako da ukupna "šteta" $f(x)$ (u odnosu na postojeće objekte) bude minimalna
- Ako pretpostavimo da je $D_i(\cdot)$ a funkciju cilja rastuća tada "korist" raste sa rastojanjem x od fiksnih lokacija, pa treba naći maksimum od $f(x)$
- Cilj je da cena transporta bude manja

Raulsov problem, Min-Max kriterijum

- Veberov model zapostavlja izolovane korisnike usluga, tj ta Veberova tačka je najbliža "prosečnom" korisniku
- Treba da se ravnopravno tretiraju naseljena I nenaseljena mesta u izboru nove lokacije
- Za razliku od Min-Sum kriterijuma, predložen je Min-Max kriterijum, po kome se minimizira maksimalno težinsko rastojanje između novog i postojećih objekata.

- Najpoznatija metoda za rešavanje Rauls-ovog problema u ravni sastoji se od sledećih koraka

1. Konstruisati konveksni omotač skupa tačaka $A = \{ai, i=1,\dots m \}$
2. Izabrati bilo koja dva temena iz skupa A, i obeležiti ih sa a i b
3. Tačke a i b određuju prečnik kruga, tako da ako sve iz A pripadaju krugu onda je kraj, a ako ne izabrati bilo koju tačku $c \in A$ van kruga

4. Ako je trougao abc pravougli ili tupougli, obeležiti temena najveće stranice sa a i b pa preći na Korak 2;

Ako je trougao oštrougli, opisati krug (centar x) oko trougla abc; Ako sve tačke ai,…,am pripadaju krugu (lopti), tada je x = x * i kraj

5. Izabrati tačku a van kruga, a sa b označiti tačku trougla najdalju od a. Povući pravu ob i sa c označiti tačku trougla sa druge strane prave od a, pa preći na Korak 3.

Primer

- Primenom Min Max kriterijuma kao primer možemo uzeti ravnopravno tretiranje naseljenih i nenaseljenih mesta u izboru nove lokacije(bolnica, hitna pomoć, vatrogasne brigade..)
- Stanovnik na periferiji grada treba da ima ista prava za hitnom intervencijom kao i stanovnik u centru
- Minimizuje se maksimalno težinsko rastojanje između novih i postojećih objekata

Veber - Raulsov problem

- Postoje situacije gde se ne mogu primeniti nijedan od ova dva problema, pa se nalazi kompromis tj dobijamo dvokriterijumski zadatak

$$f^*=(fw,fr)$$

Lokacije više objekata

- Postavljaju se sledeća pitanja:

1) Koji je optimalni broj novih objekata?
2) Koji korisnici su usluženi od kog snabdevača?
3) Koja je uloga interakcije između snabdevača?

- Razlikujemo one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija i one kod kojih ne postoji

lokacije više objekata

- Funkcija cilja može predstavljati ukupnu cenu transporta između postojećih i novih objekata, kao i između samih novih objekata(specijalan slučaj je kada ne postoji interakcija između novih objekata)
- moguće je izabrati pravougaono, Euklidovo ili I_p rastojanje, što zavisi od konkretnog problema koji se rešava

- osnovno je pitanje konveksnosti funkcije $f_M(x)$
- Funkcija $f_M(x)$ je konveksna za I_p funkciju rastojanja
- Za rešavanje se koristi ista ideja kao u rešavanju Veberovog problema(odn uvodi se nova fja)
- Primer-izbor lokacije tv odašiljača ili vatrogasnih brigada
- Favorizuju se prosečni korisnici a zanemaruju se izolovani

Lokacija p neželjenih objekata

- Cilj je da objekti budu što je moguće dalji jedni od drugih u nekoj zatvorenoj datoj oblasti S
- Predlažu se 4 modela ovog tipa:

a) max-min-min(p disperzioni)

b) max-min-sum

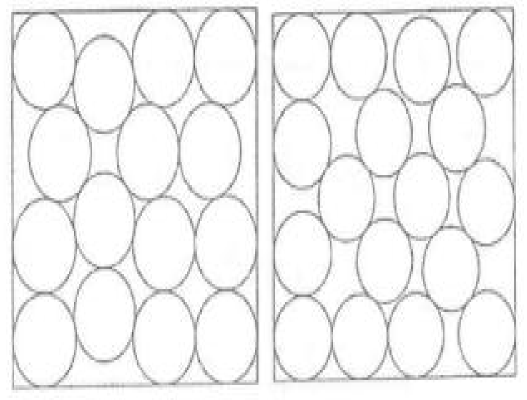
c) max-sum-min i

d) max-sum-sum(p-zbirne odbrane)

- Primer p lokacija nuklearnog otpada, hazardnog materijala ili vojnih baza (da one budu što je moguće dalje jedna od druge)

Max-min-min (p-Disperzioni problem)

- Tesno vezan sa klasičnim matematičkim zadatkom pakovanja krugova jednakih poluprečnika u kvadrat
- Cilj je konstruisati p disjunktnih krugova istog poluprečnika u jedinični kvadrat tako da poluprečnik bude što je moguće veći
- Ako je S jedinični kvadrat, d Euklidovo rastojanje i r prečnik, tada p-disperzioni problem postaje zadatak pakovanja krugova



- Predlaže se nova metoda nazvana Reformulacioni spust koji menja formulacije problema sve dok postoji bolje rešenje
- **Korak 1.** Konstruisati namanje dve nelinearno povezane formulacije problema;
- **Korak 2**. Izabrati početno rešenje Z;
- **Korak 3**. Ponavljati sledeće korake po svim definisanim formulacijama
- Naći stracionarnu tačku Z` primenom neke NP metode, čije je početno rešenje Z;
- ako je Z` bolje od Z, tada je Z= Z`; vratiti se na korak 3, tj. na prvu formulaciju;

Max-sum-sum (p-odbrambeni) problem

- Ako kažemo da je S konveksni poliedar, optimalno rešenje će se naći u rogljevima poliedra S
- **Degenerisano rešenje** je kada u optimalnom rešenju više od jednog novog objekta bude locirano u istoj tački

Lokacijsko - alokacijski problem

- Najjednostavniji lokacijsko-alokacijski model se ogleda u tome da:

a) ne postoje interakcije između novih objekata
b) broj novih objekata je unapred zadat
c) korisnici se snabdevaju jednom vrstom robe (single - comodity)
d) kapacitet novih lokacija (distributivnih centara) nije ograničen

- Drugi naziv je više-izvorni Veberov problem
- Potrebe korisnika u celosti moraju biti zadovoljene(zbog skupa ograničenja)
- Iako izgleda jednostavnije od modela višeobjektnog lociranja, on se daleko teže može rešiti

Primer

- Date su lokacije određenog broja korisnika i količine njihovih zahteva za robom
- Treba odrediti lokacije u ravni za 3 distributivna centra, tako da zahtevi svih korisnika za robom budu zadovoljeni, a težinski zbir rastojanja od svakog korisnika do distributivnog centra bude minimalan