Kontinualni lokacijski modeli

Studenti:

Bojana Lojić 668/16

Tamara Stanojković 550/15

Veberov problem sa pravougaonom metrikom

- U urbanim sredinama Euklidova metrika kojom se određuje direktno rastojanje između novih i postojećih tačaka je često neprimenljiva. U gradskim uslovima ulice kojima se kreću vozila se uglavnom seku pod pravim uglom. Zato se javlja potreba za rešavanje Veberovog problema pravougaonom metrikom.
- Potrebno je rešiti sledeći problem:

$$(\min)\ f(x) = \sum_{I=1}^{m} w_i d_i(x) = \sum_{I=1}^{m} w_i(|x_1-a_1^i|+|x_2-a_2^i|) = \sum_{I=1}^{m} w_i|x_1-a_1^i| + \sum_{I=1}^{m} w_i|x_2-a_2^i|$$

$$(\min)\ f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

- Prvo se rešava problem za jednu koordinatu: (min) $f_1(x_1)$ odakle se dobija x_1^*, a zatim za drugu: (min) $f_2(x_2)$ odakle se dobija x_2^*. Tačka $X^*=(x_1^*,x_2^*)$ predstavlja rešavanje polaznog Veberovog problema.

Veberov problem sa pravougaonom metrikom

- Ako su zadate tačke $A_i=(a_1^i,a_2^i)$ i težinski koeficijenti tih tačaka w_i, i=1,..,m algoritam za određivanje j-te coordinate je:

1. Sortirati koordinate tačaka A_i, i= 1, ..m u neopadajući niz. Dalje se pretpostavlja da ideks (i) raste po sortiranom redosledu: $aj^1 \leq a_j^2 \leq \ldots \leq a_j^m$. Moguća su dva slučaja:

2. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{2} < \sum_{i=1}^{k} w_i$ pri čemu je za k=1 leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $x_j^* = a_j^k$.

3. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{2} = \sum_{i=1}^{k} w_i$ tada je rešenje višestruko, tj. tražena koordinata x_j^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[a_j^k, a_j^{k+1}]$.

Primenjujući ovaj algoritam za j=1, a potom za j=2 dobijaju se obe koordinate tačke X*.

Zadatak 1.

U jednoj opštini se nalazi četiri naseljena mesta. Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz sva četiri naselja. Lokacije mesta (koordinate u kilometrima) su $A_1(4,4)$, $A_2(3,1)$,$A_3(6,4)$,$A_4(6,2)$. Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole tako da ukupan put svih đaka od kuće do škole bude minimalan. Ako su težine tačaka redom $w_1=4$, $w_2=1$,$w_3=2$,$w_4=3$ rešiti zadatak koristeći pravougaonu metriku.

Zadatak 2.

Rešiti Veberov problem koristeći pravougaonu metriku.

Lokacije		L1	L2	L3	L4	L5	L6
Koordinate	X	500	400	200	500	300	100
	Y	200	300	400	500	100	200
Težinski koeficijenti		0.08	0.04	0.22	0.10	0.12	0.44

Vajsfeldov algoritam za rešavanje veberovog problema

- Veberov problem Euklidove metrike nije moguće rešiti analitički. Zato se često koristi Vajsfeldov algoritam kojim se dobija približno rešenje Veberovog problema.

- Dato je m tačaka $A_i = (a_1^i, a_2^i)$, njihove težine w_i, i=1,....,m i koeficijent kriterijuma zaustavljanja numeričkog postupka $\varepsilon > 0$. Potrebno je odrediti lokaciju (koordinate) nove tačke koristeći kao kriterijum sumu otežanih rastojanja (*minisum* problem).

- Pošto se zna da ovaj algoritam jako sporo konvergira kada se optimalno rešenje poklapa sa jednom od zadatih tačaka, najpre se proverava da li je neka od postojećih tačaka optimalna lokacija za novi objekat. Ako se utvrdi da nije, prelazi se na iterativni deo algoritma.

Vajsfeldov algoritam za rešavanje veberovog problema

1. Izračunati međusobna rastojanja između svih m tačaka:

$$d(A_r,A_l) = \sqrt{(a_1^r-a_1^l)^2 + (a_2^r-a_2^l)^2}\ , \ \forall\, r, l \in \{1,\ldots,m\}$$

2. Proveriti da li za neku tačku r koja pripada skupu {1,..m} važi:

$$c_r = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2} \leqslant w_r$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neko r=> KRAJ. Rešenje se nalazi u tački A_r. U suprotnom, ići na sledeći korak.

3. Stavimo da je k = 0 i odredimo početno rešenje $X^0 = (x_1^0,x_2^0)$ po formuli:

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}\ , \ j = 1, 2$$

Vajsfeldov algoritam za rešavanje veberovog problema

4. Izračunati rastojanja između X^k = (x1k, x2k) i zadatih tačaka:

$$d(X^k, A_i) = \sqrt{(x_1^k - a_1^i)^2 + (x_2^k - a_2^i)^2}, \ \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}$$

5. Računamo po iterativnoj formuli:

$$x_j^{k+1} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_j^i}{d(X^k, A_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(X^k, A_i)}}, \quad j = 1, 2$$

6. Ako je $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$, za svako j koje pripada skupu {1,2} => KRAJ. X^{k+1} se usvaja kao ‘’dovoljno dobro’’ rešenje. U suprotonom, staviti k=k+1 i ići na korak 4.

Zadatak 3.

Date su koordinate i težinski koeficijenti za četiri tačke. Potrebno je odrediti koordinate nove tačke čija će suma otežanih rastojanja od zadatih tačaka biti minimalna. Koristiti Euklidovu metriku, a za koeficijent kriterijuma zaustavljanja uzeti ε=0,05.

$A_1(4,4)$, $w_1=4$

$A_2(3,1)$, $w_2=1$

$A_3(6,4)$, $w_3=2$

$A_4(6,2)$, $w_4=4$

Zadatak 4.

U jednoj opštini se nalaze četiri naseljena mesta.Potrebno je sagraditi osnovnu školu u koju bi išla deca iz sva četiri naselja. Da bi se odredila lokacija nove škole, u obzir se uzimaju položaji tih naselja i broj stanovnika (smatra se da je broj đaka proporcionalan broju stanovnika). Lokacije mesta (koordinate zadate u kilometrima) i broj stanovnika (u hiljadama) je dat u sledećoj tabeli.

Mesta:	M1	M2	M3	M4
X	3	8	10	12
Y	7	1	5	1
Broj stanovnika	80	30	25	40

Potrebno je odrediti mesto gradnje nove škole, tako da ukupan put svih đaka od kuće do škole bude minimalan. Smatra se da je put od naselja do škole pravolinijski i da je rezultat dovoljno dobar ako je razlika obe koordinate između dve uzastopne iteracije manja od 20 metara.