# Kontinualni lokacijski modeli

Milica Kabić 523/16

# Matematički modeli najčešće se dele na:

1. Diskretne
2. Kontinualne
3. Mrežne

Matematički modeli teorije lokacija imaju za cilj da odgovore na sledeća pitanja:

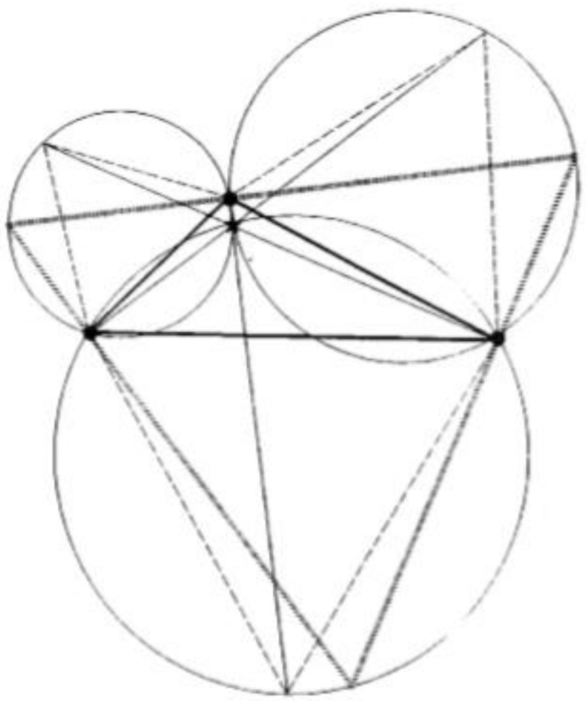
- Koliko novih objekata treba otvoriti (postaviti)?
- Gde će oni biti postavljeni?
- Koliko veliki (tj. kog kapaciteta) će biti svaki od otvorenih objekata?
- Kom novom objektu će biti pridodeljen (alociran) svaki od korisnika usluga?

- Pitanje: Od čega zavisi odgovor?

## Kontinalni lokacijski modeli su oni kod kojih je novi objekat smešten u ravni ili prostoru i može se naći na nekoj od beskonačno mnogo tačaka.

Prvi lokacijski problem: Naći tačku trougla čiji je zbir rastojanja do temena minimalan.

- Pjer de Ferma (1601-1665) - ,,peta tačka trougla“
- Toričeli (1608-1647) – konstruktivno rešio zadatak
- Batista Cavalieri (1598-1647) – ugao od $120^{o}$
- Tomas Simpson (1710-1761) – presek pravih
- Veber 1909. – težinski model



# LOKACIJA JEDNOG OBJEKTA (VEBEROV PROBLEM)

- Broj izbora tačaka je neograničen, beskonačan
- Tačka treba da ispuni minimum ili maksimum nekog kriterijuma
- Problem: Dato je *m* tačaka u ravni $a_1, a_2, \ldots a_m$ i m skalara (težina) pridodeljenih svakoj tački (w1, w2,...,wm). Naći tačku x za koju je suma težinskih rastojanja do datih tačaka minimalna.

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot d(x, a_i),$$

gde su

$x = (x_1, x_2)$ - koordinate nepoznate lokacije;

$m$ - broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,

$d(x, a_i)$ - rastojanje $i$-tog korisnika do nepoznate lokacije,

$n_i$ - broj elemenata $i$ -tog korisnika,

$r_i$ - jedinična cena prevoza $i$-tog korisnika,

$w_i = n_i r_i$ - težinski koeficijenti pridodeljeni $i$-tom korisniku,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate (lokacije) $i$-tog korisnika,

$f_w$ - funkcija cilja Veberovog problema.

# Različiti načini merenja rastojanja

- Euklidova metrika

Ako x i z pripadaju $\mathbf{R}^n$ , tada je njihovo Euklidovo rastojanje određeno sa

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2} = \| x - z \|_2,$$

gde $\|\cdot\|_2$ predstavlja Euklidovu normu. Funkcija cilja (1) sada ima oblik

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(x, a_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left( \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^{(i)})^2 \right)^{1/2}$$

S1: Ako su $a^i=(a_1^{(i)},a_2^{(i)})$niz datih tačaka u $\mathbf{R}^2$ dužine *m*, tada je $f_w$ definisana funkcijom cilja, konveksna funkcija.

Funkcija nije glatka jer su parcijalni izvodi prekidne funkcije, tačke prekida su postojeće lokacije jer je $d(a_i,a_i)=0$.

S2:Funkcija $f_w(x)$dostiže minimum u jednoj od fiksnih tačaka $a_r=(a_1^{(r)},a_2^{(r)})$, r ako i samo ako važi

$$c_r = \left( \left( \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i \cdot (a_1^{(r)} - a_1^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i \cdot (a_2^{(r)} - a_2^{(i)})}{d(a_r, a_i)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq w_r$$

Problem nalaženja tećišta (centroida)

$$f_c(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i d^2(x, a_i)$$

Težište ili centroid

$$x_j^c = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_j^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} w_i}, \qquad j = 1,2$$

1. Metoda rešavanja problema sa Euklidovom merom rastojanja

$$d^H(x,z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon}$$

2.Numeričko rešavanje sistema nelinearnih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^i)}{d(x, a_i)} = 0, \qquad j = 1,2$$

# Pravougaono rastojanje

- Rešavamo dva nezavisna zadatka sa po jednom promenljivom, odnosno problem svodimo na dve minimizacije po jednoj promenljivoj.

Funkciia cilia

$$f_w(x)=\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (|\, x_1 - a_1^{(i)} \,| + |\, x_2 - a_2^{(i)} \,|) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} w_i \,|\, x_1 - a_1^{(i)} \,| + \sum_{i=1}^{m} w_i \,|\, x_2 - a_2^{(i)} \,| =$$
$$= f_{w1}(x) + f_{w2}(x)$$

Rastojanje

$$d_i(x) = \sum_{i=1} |\, x_j - a_j^{(i)} \,|,\ i = 1,\ldots,m$$

Prvo se rešava problem za jednu koordinatu (min) $f_1(x_1)$ odakle se dobija $x_1^*$, a zatim za drugu (min) $f2(x2)$ odakle dobijamo $x_2^*$.

$x^*=(x_1^*,x_2^*)$ – rešenje Veberovog problema

# Lokacijska ograničenja

- Lokacije u kojima se ne može graditi novi objekat zbog raznih faktora (reljef, zemljište, ljudi,...)
- D – skup dopustivih lokacija

$$\min fw(x) = \sum w_i d(x, a_i)$$

Korak 1. Naći bezuslovni minimum i obeležiti ga sa x;

Korak 2. Proveriti da li je tačka x –dopustiva, ako jeste, kraj;

Korak 3. Uvodi se koncept vidljivosti, tj. nalazi se podskup dopustivog skupa koji je vidljiv iz x.

Korak 4. x* je najbliža sa x, a pripada podskupu određenom u Koraku 3 (tj. x* je najbliža dopustiva, a vidljiva iz x)

# Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja

- Iako je funkcija od x nelinearna, u proširenom modelu je zavisnost funkcije od rastojanja linearna.
- ako je $y_i = d_i(x)$, tada je funkcija cilja linearna po y:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{m} w_i y_i$$

Primer:

Eksperimentalno je utvrđeno da minimalno vreme dolaska hitnih službi opada sa povećanjem rastojanja i da je i C strogo konkavna za kratka rastojanja, a linearna za velika. Matematički se ovi uslovi mogu zapisati kao

$$C_i[d_i(x)] = k_i + w_i d_i^{\alpha}(x),\ \alpha \in (0,1),\ x \neq a_i$$

# Veliki kvadrat – mali kvadrat

**Korak 1:** Izabrati početnu tačku $x_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ koja pripada konveksnom omotaču (KO) i naći

$\bar{f} = f(x_0)$

**Korak 2:** Podeliti konveksni omotač KO $(a_1, \ldots, a_m)$ na zone (kvadrate) i naći donju granicu svake od zona, tj.

$$\underline{f}_{z_j} = \sum_{i=1}^{m} C_i[d_i(Z_j)]$$

gde je dijametar $d_i(Z_j) = (\min)\, d(a_i, Z_j)$ - najkraće rastojanje između $a_i$ i zone $Z_j$.

**Korak 3:** Eliminisati sve zone $Z_j$ za koje važi $\underline{f}_z > \bar{f}$.

**Korak 4:** ako je dijametar ne eliminisanih zona manji od proizvoljno malog broja $\varepsilon$, kraj.

**Korak 5:** izračunati vrednosti $f$ u proizvoljnim tačkama ne eliminisanih zona (na primer u centru) i onu gde je $f$ najmanja označiti sa $\bar{f}$. Podeliti preostalu oblast na još manje zone tj. preći na korak 2.

# Primer – Problem maksimalnog potencijala

Treba odrediti tačku u ravni (npr. grad u nekoj državi), koji ima maksimalnu interakciju ili maksimalan potencijal. U zavisnosti od rezultata, neka firma želi da u tom gradu otvori predstavništvo. Po dobro utvrđenoj tradiciji u geografiji, obim kretanja između dva grada proporcionalan je količini i atraktivnosti njihovih proizvoda (ponude), a obrnuto proporcionalan stepenu rastojanja između njih. Funkcija cilja koja je predložena u nameri da predstavi ovu situaciju je oblika

$$(\max)\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{[B_i + d_i(x)]^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

Gde su:

*m* - broj gradova;

$A_i$ - mera aktivnosti (privlačnosti, potencijala) grada

$B_i$ - data konstanta

# Lokacija neželjenih objekata – anti Veber

- Primenjuje se za lociranje neželjenih objekata (đubriva, otpada, hemikalija,..), da lokacija bude dovoljno daleko od ljudi ali ne previše daleko zbo cene transporta. Cilj je da ukupna šteta $f(\mathrm{x})$ bude minimalna u odnosu na postojeće objekte.

$$(\min)\ f_D(x) = \sum_{i=1}^{m} D_i[d_i(x)],\ x \in S$$

$S$ – skup dozvoljenih lokacija;
$x$ – nepoznata lokacija;
$D_i$ - opadajuća, i neprekidna nelinearna funkcija od rastojanja;

Primer: Rafinerija u Pančevu

# Raulsov problem, Min-Max kriterijum

- Veberov model zapostavlja izolovane korisnike usluga
- Stanovnici naseljenih i nenaseljenih područja se tretiraju na isti način

Za razliku od Mim-Sum kriterijuma, predložen je Min-Max kriterijum, po kome se minimizira maksimalno težinsko rastojanje između novog i postojećih objekata.

$$(\min) f_R(x) = \max_i w_i d_i(x) \quad i = 1, \ldots, m.$$

Kada su težinski koeficijenti jednaki 1: $$(\min) f_R(x) = \max_i d_i(x) \quad i = 1, \ldots, m$$



# Rešavanje Raulsovog problema

**Korak 1:** Konstruisati konveksni omotač $H$, skupa tačaka $A = \{a_i, i = 1,\ldots,m\}$.

**Korak 2:** Izabrati bilo koja dva temena iz skupa $A$, i obeležiti ih sa $a$ i $b$.
**Korak 3:** Tačke $a$ i $b$ određuju prečnik kruga. Ako sve tačke iz $A$ pripadaju krugu, tj.

$$H \subset K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \text{ tada je } x^* = \frac{a+b}{2}, \text{ kraj;}$$

ako nije izabrati bilo koju tačku $c \in A$ van kruga $K$.

**Korak 4:** ako je trougao abc pravougli ili tupougli, obeležiti temena najveće stranice sa $a$ i $b$ pa preći na Korak 2; ako je trougao oštrougli, opisati krug (centar $x$) oko trougla abc; ako sve tačke $a_i,\ldots,a_m$ pripadaju krugu (lopti), tada je $x^* = x$ i kraj;

**Korak 5:** izabrati tačku $a$ van kruga, a sa $b$ označiti tačku trougla najdalju od $a$. Povući pravu $\overline{0b}$ i sa $c$ označiti tačku trougla sa druge strane prave od $a$, pa preći na Korak 3.

# Veber – Raulsov problem

- Urealnim situacijama kompromis između Veberovog i Raulsovog problema je dvokriterijumski zadatak gde je $f=(f_w,f_r)$. Ako traži Pareto-optimalno rešenje, predložen je sledeći algoritam:

**Korak 1:** Rešiti Veberov problem $f_w(x)$; obeležiti sa $x'$ optimalno rešenje;

**Korak 2:** Izračunati $f_r(x')$; obeležiti sa $f'$ dobijenu vrednost;

**Korak 3:** $f' = f' - h$, gde je $h$ - korak, fiksni mali broj;

**Korak 4:** Umanjiti proporcionalno sa $h$ u odnosu na $f'$ sve $d_i(x)$ i obeležiti ih sa $r_i$, tj.

$$r_i = d_i(x') \cdot \frac{f' - h}{f'}$$

**Korak 5:** Opisati krugove sa centrima u $a_i$ i poluprečnicima $r_i$ ($K_i(a_i, r_i)$).

**Korak 6:** Ako je presek krugova prazan skup $x'$ je Pareto optimalno rešenje i kraj. U suprotnom rešiti Veberov problem sa lokacijskim ograničenjima koja su predstavljena kao presek krugova, obeležiti dobijeno rešenje sa $x'$ pa preći na korak 2.

# Lokacija više objekata

Slučaj koji se često javlja u praksi i traži odgovore na sledeća pitanja:

- koji je optimalni broj novih objekata?
- koji korisnici su usluženi od kog snabdevača (alokacijske promenljive $y_{ij}$)?
- koja je uloga interakcije između snabdevača (novih objekata)?

Razlikujemo dva tipa:

- one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija
- one kod kojih ne postoji međusobna veza

# Min-Sum (Veberov) problem lokacije više objekata

$$(\min) f_M(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} d_i(x_j) + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=j+1}^{q} v_{jk} d(x_j, x_k)$$

$m$ - broj fiksnih (postojećih) objekata,
$q$ - broj novih objekata,
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ - nepoznate lokacije novih objekata,
$x_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ - $j = 1, \ldots, q$, koordinate nepoznatih objekata,
$v_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, p$ - mera interakcije izmedju novih objekata $j$ i $k$ (odnosno cena),
gde je $v_{jk} = v_{kj}$, $v_{jk}=0$ ne postoji interakcija između objekata
$w_{ij}$ - cena jediničnog transporta od korisnika $i$ do nove lokacije $j$,
$d_i(x_j) = d(x_j, a_i)$ - rastojanje između korisnika i $j$-te nove tačke,
$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate $i$-tog korisnika.

Funkcija cilja može biti ukupna cena transporta između novih i starih lokacija.

# Lokacija p neželjenih objekata

- Cilj je da novi objekti budu što dalje jedni od drugih, jer su neželjeni
- Vojne baze, nuklearni otpad...
- Postoje 4 tipa:

1. max-min-min
2. maxmin-sum
3. max-sum-min
4. max-sum-sum

$$\max_{x\in S}(\min_{i}\min_{j} d(x_i,x_j))$$

$$\max_{x\in S}(\min_{i}\sum_{j=1}^{p} d(x_i,x_j))$$

$$\max_{x\in S}\sum^{p}\min_{j} d(x_i,x_j)$$

$$\max_{x\in S}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} d(x_i,x_j)$$

# Lokacijsko – Alokacijski problem

Do sada su razmatrani slučajevi u kojima je protok između novih i postojećih objekata dat, ali češći su oni u kojima je $w_{ij}$ i $v_{jk}$ nepoznati.

Pojednostavljenje se sastoji u sledećem:

- ne postoje interakcije između novih objekata
- broj novih objekata je unapred zadat
- korisnici se snabdevaju jednom vrstom robe (single – comodity)
- kapacitet novih lokacija (distributivnih centara) nije ograničen

- Ima oblik:

$$(\min) f_{LA}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{p} y_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, m$$

$$0 \le y_{ij} \le 1, \; i = 1, \ldots, m \text{ , i } \; j = 1, \ldots, p \,.$$

gde su

$d_i(x_j) = d(a_i, x_j)$

$p$ - broj novih objekata (nepoznatih)

$m$ - broj korisnika (grupa korisnika)

$a_i$ - lokacije korisnika, $i = 1, \ldots, m$ .

$w_i$ - težinski koeficijent $i$-tog korisnika.

$x_j$ - nepoznate lokacije novih objekata, $j = 1, \ldots, p$ (lokacijska promenljiva)

$y_{ij}$ - promenljiva koja određuje proporciju zahteva korisnika $i$ za objektom $j$ (alokacijske promenljive);

- Skup ograničenja označava da potrebe korisnika u celosti moraju biti zadovoljene. Funkcija cilja daje ukupnu cenu prevoza sistema. U slučaju snabdevanja samo jednom vrstom robe ("single comodity"), može se pokazati da se u optimalnom rešenju $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^*)$ , svaki korisnik snabdeva kod najbližeg snabdevača, tj. $y_{ij} \in \{0,1\}$

# U lokacijsko – alokacijske modele spadaju:

- Alternativna heuristika Cooper
- p-Median heuristika
- Meta-heurističke metode
- LA model ograničenih kapaciteta
- Model sa konstantnim fiksnim troškovima (FT)
- Model lančanogsnabdevanja(Supply chain management

# Alternativna heuristika Cooper

- Naizmenično (alternativno) rešava lokacijski i alokacijski problem, dok se ne dobije lokalni minimum, odnosno rešenje koje se ponavljanjem gornjih procedura više ne može popraviti

Skup promenljivih je podeljen na:

- lokacijske $x_j$
- alokacijske $y_{ij}$

Rešenja mogu biti i degenerisana.

**Korak 1:** ***Iniciranje.*** Izabrati lokacije (proizvoljno) $q$ tačaka (snabdevača) $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Brojač iteracija je na 1.
**Korak 2:** ***Alokacijski problem.*** Pridodeliti svakom korisniku najbližeg snabdevača, odnosno naći ($y_{ij} \in \{0,1\}$).
**Korak 3:** ***Kriterijum završetka.*** Ako nema promena u ovom pridodeljivanju u odnosu na prethodnu iteraciju, kraj.
**Korak 4:** ***Lokacijski problem.*** Rešiti Veberove probleme za svaku grupu potrošača, vezanu za snabdevanje u $x_i$. Te tačke obeležiti sa $x_1, x_2, \ldots, x_q$, pa preći na Korak 2.

# p-Median heuristik

- Davala najbolje rezultate ali zanemarena zbog eksponencijalne složenosti
- Ovaj problem je rešen identifikovanjem p-težišta i primenom savremene egzaktne i približne metode rešavanja problema p- tržišta u prvom koraku, a zatim za svaki od p centara i njima najbližih korisnika, rešen je Veberov problem.
- Dobijena rešenja bolja od modifikovane kuper metode

# Meta-heurističke metod

- Popravlja rešenja dobijena lokalnim istraživanjima

# LA model ograničenih kapaciteta

- Kapaciteti snabdevača ograničeni

$$(\min) f(c,x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j)$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \cdot n_i \le \overline{n}_j,\ j = 1,\dots,p$$

$$0 \le y_{ij} \le 1$$

gde su

- $n_i$ - broj korisnika u tački $a_i$
- $\overline{n}_j$ - maksimalan kapacitet snabdevača $x_j$.

# Model sa konstantnim fiksnim troškovima (FT)

$$(\min) f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{p} y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(x_j) + pF$$

$$\sum_{i=1}^{p} y_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,m$$

$$0 \le y_{ij} \le 1 \quad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,p.$$

Funkcijom cilja ovog modela određuju se ukupni troškovi transporta od korisnika do snabdevača ili centara, dok se skupom ograničenja obezbeđuje ispunjenje svih zahteva korisnika. Traži optimalan balans između cene izgradnje novog objekta F i njihovog broja p.

$$(\min) f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} F_j z_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot y_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} yij = 1,$$

$$0 \le y_{ij} \le z_j \quad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2..,m.$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad j = 1,2,\ldots,m$$

Ako pretpostavimo da p novih lokacija treba izabrati među lokacijama m korisnika, tada se gornji kontinulani model transformiše u dobro poznati diskretni jednostavni lokacijski problem

# Model lančanog snabdevanja

U cilju formulisanja matematičkog modela, uvešćemo i sledeće ozmake:
$q$ – broj snabdevača (fabrika);
$b_k$, $k=1,\ldots,q$ – poznate lokacije snabdevača;
$z_{kj}$ – promeljiva koja određuje količinu robe koju treba transportovati od fabrike k do centra j;
$\lambda \in [0,1]$ - parametar kojim se određuje odnos troškova koje imaju korisnici i distributivni centri;
za $\lambda = 1$, donosioc odluke ne uzima u obzir svoje troškove.

$$(\min) f(x,y,z) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} y_{ij} \cdot w_i \cdot d_i(a_i, x_j) + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} z_{kj} \cdot d_i(bk, x_j)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{p} y_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \cdot n_i \leq \sum_{k=1}^{q} zkj, \quad j = 1,\ldots,p$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1$$

Hvala na pažnji!

Pitanja?