01

MILENA GATIČ 668/18 | NOVEMBAR 2020
LOKACIJA I RASPORED OBJEKATA

Diskretni lokacijski modeli

02

Šta su lokacijski modeli?

Generalno lokacijski problemi se odnose na mesta ili pozicije objekta ili grupe objekata u zadanom prostoru koji opslužuju prostorno distribuirani skup korisnika.

U užem smislu, posebno u logistici, ovi problemi dnose se na lociranje resursa, skladišnih objekata, terminala, pretovarnih mesta, pa je po pravilu reć o zadacima lociranja taćke u dvodimenzionom prostoru.

Klasifikacija

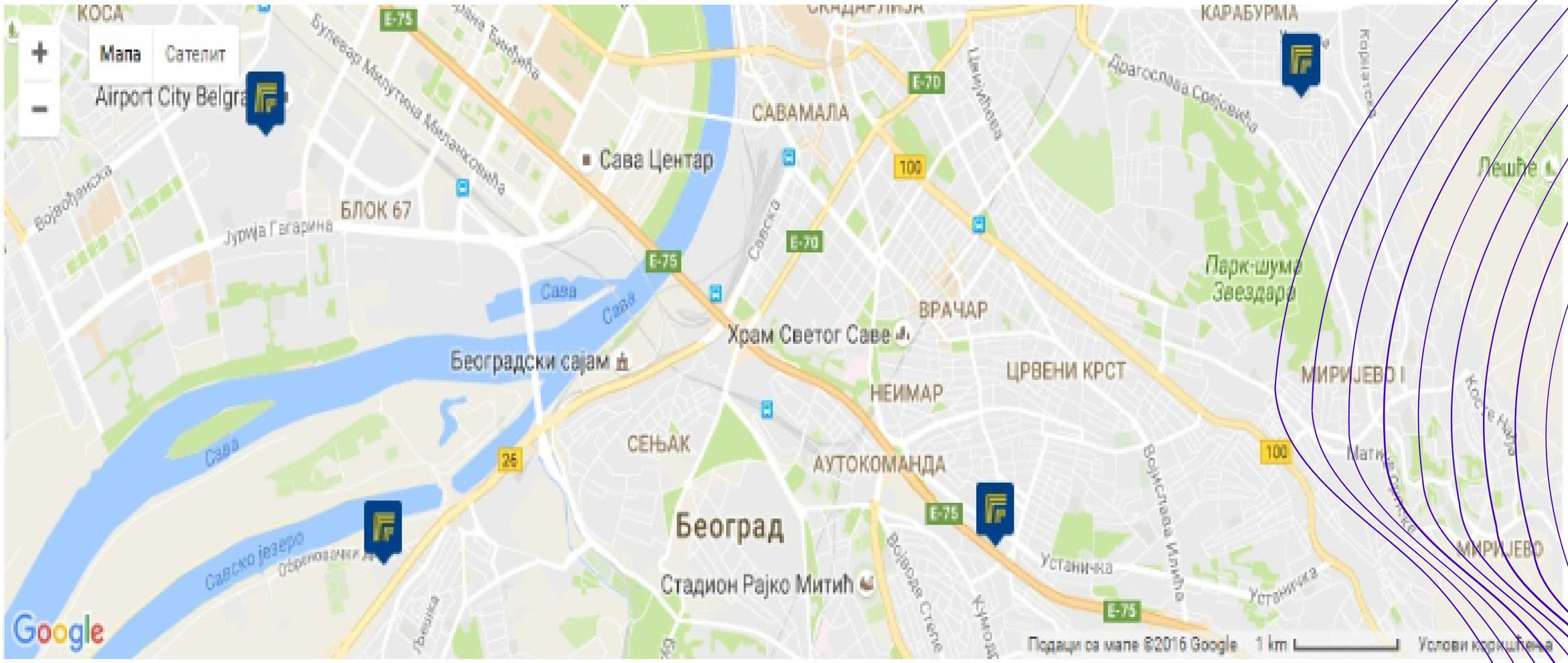
- Statički i dinamički problemi
- Kontinualni i diskretni problemi
- Lociranje jednog ili više objekata
- Postojanje ili nepostojanje kapacitivnih ograničenja
- Lokacijski, alokacijski i lokacijsko-alokacijski problemi
- Jednokriterijumski i višekriterijumskiproblemi

Diskretni modeli

U diskretnom lokacijskom problemu treba **izabrati jednu ili više novih lokacija** (centara) iz konačnog, unapred zadatog **skupa mogućih lokacija**.

Prebrojavanjem svih mogućih kombinacija novih lokacija može se doći do **optimalnog** rešenja, odnosno do rešenja u kome **funkcija cilja** dobija **minimalnu vrednost**, ali u slučaju velikog broja korisnika i novih objekata, ovaj proces može na računaru trajati veoma dugo. Drugim rečima, većina diskretnih lokacijskih problema je nelinearno programiranje – teško. Zbog toga su i metode rešavanja najčešće **heurističke**.

Diskretni modeli



Lokacija jednog objekta

$$(\min) f_j = \sum_{i=1}^{m} w_i d_{ij} \ ,$$

gde su

m - broj datih tačaka korisnika

n_i - broj mogućih lokacija

$w_i = n_i \cdot r_i$ (n_i - broj korisnika u i-toj tački)

r_i - cena jediničnog transporta od i-tog korisnika,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \\ d_{m1} & & d_{mn} \end{bmatrix}$$ - data rastojanja.

Problem analogan Veberovom - minimizovati ukupne troškove prevoza.

Složenost algoritma - O(m*n) - polinomijalno rešiv.

Lokacija jednog objekta -primer- prodavnica stočne hrane

Cilj je minimizirati troškove transporta do kupaca, u slučaju kada se vrši dostava proizvoda kupcima. Stoga se prodavnica pozicionira u naselju ili gradu,na podjednakoj udaljenosti od okolnih sela.

Lokacija jednog objekta -primer-

P-težišni problem

Diskretna verzija lokacijsko-alokacijskog problema tj.
- dat je skup U lokacija m korisnika i skup **L lokacija n-potencijalnih novih objekata**

Potrebno je odrediti kojih **p** između njih **n** treba izabrati tako da ukupni transportni **troškovi** između novih objekata i korisnika budu **minimalni**, a da u otpunosti budu zadovoljeni zahtevi svih korisnika.

Kombinatorna formulacija ima oblik:

$$(\min)\sum_{i=1}^{m}\min_{j\in J} t_{ij}\ , \qquad \text{gde je } J \subseteq L, |J| = p\text{, a } t_{ij} \in$$

P-težišni problem

$$(\min) f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1,2,\ldots,m; \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p \qquad (4)$$

$$\boxed{0 \le x_{ij} \le y_j}$$

$$\boxed{1 \le x_{ij} \le y_j}, \; i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n, \qquad (5)$$

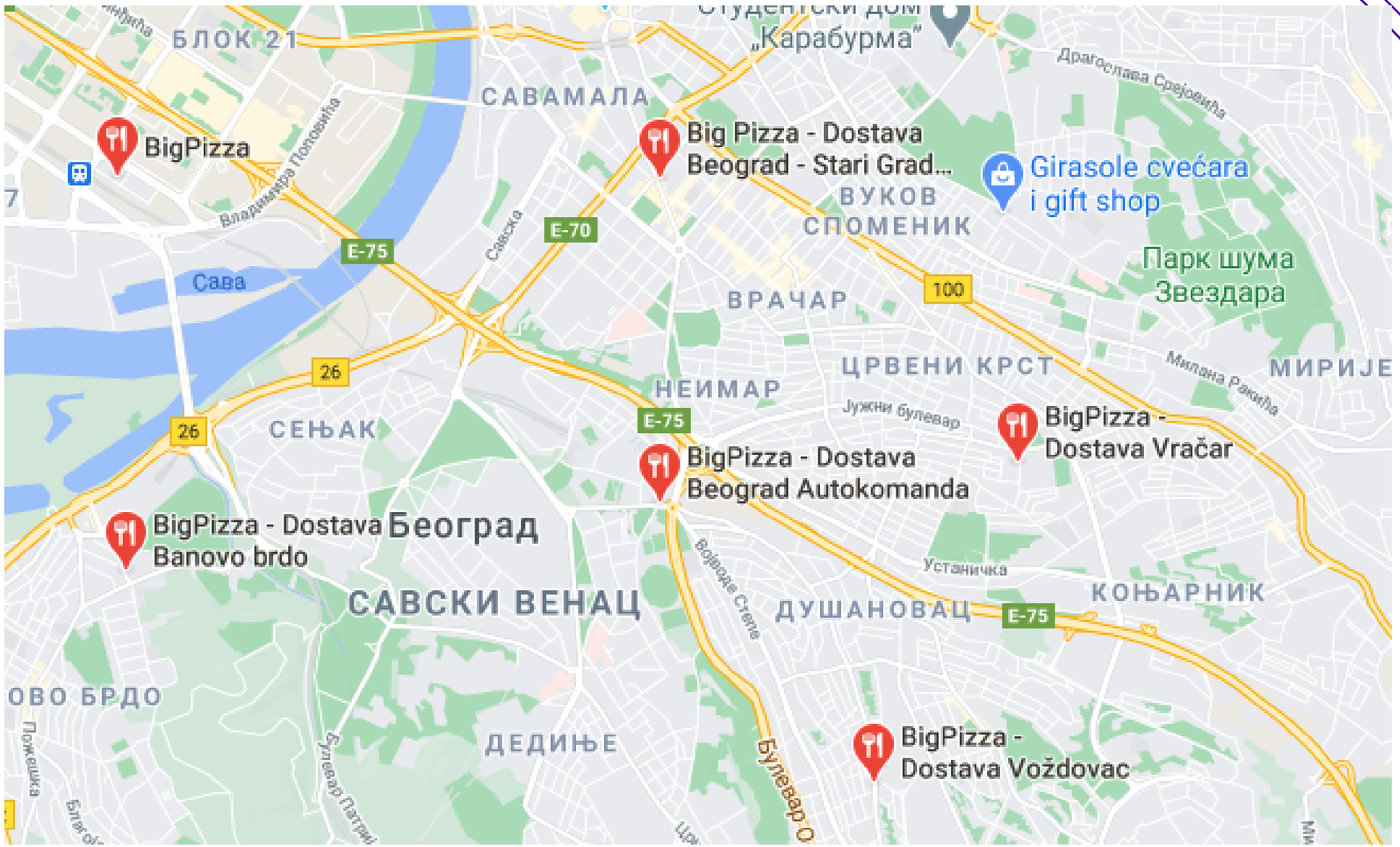
$$y_j \in \{0,1\}, \; j = 1,2,\ldots,n, \qquad (6)$$

gde su:

m – broj datih tačaka korisnika
n – broj mogućih lokacija
p – broj novih objekata
x_{ij} - proporcija zadovoljenja i-tog zahteva od j-tog snabdevača (alokacijske promenljive)
t_{ij} - cena transporta (ili rastojanje) od i-tog korisnika do j-tog novog objeka,

$$y_j = \begin{cases} 0, \text{ako ne treba otvoriti objekat na lokaciji } j, \\ 1, \text{ako treba otvoriti objekat na } j\text{ - oj lokaciji.} \end{cases}$$

P-težišni problem



ima više objekata u različitim delovima grada tako da je svaki deo gradaprekriven i troškovi dostave su minimalni

Šta je heuristika?

Heuristički metodi se koriste da ubrzaju proces pronalaženja dovoljno dobrog rešenja u situacijama kada sprovođenje detaljnog istraživanja nije praktično. Primeri toga obuhvataju korištenje raznih uopštenih pravila, informisanog nagađanja, intuicije i zdravog razuma.

U informatici, veštačkoj inteligenciji, i matematičkoj optimizaciji, heuristika je tehnika rešavanja ili brže od klasičnih metoda, ili nalaženja približnog rešenja kada klasični metodi ne mogu da nađu tačno rešenje. Kod heuristika se menja optimalnost, kompletnost, tačnost, i / ili preciznost za brzinu.

pohlepna heuristika

Suština pohlepne heuristike je u pronalaženju najboljeg rešenja u svakom koraku. Kreće se od nule i grabežljivo ide ka rešenju.

1. Rešiti problem nalaženja jedne lokacije - na taj način je pronađena jedna od p tačaka
2. Ako je broj novih objekata p, kraj iteracija.
3. Ako je nađeno k novih lokacija izabrati k+1 tačku od preostalih n-k, tako da se minimizuju troškovi transporta za svakog korisnika i preći na drugi korak.

štedljiva heuristika

Polazi od pretpostavke da **imamo sve** (svih n objekata je već locirano) i u svakom koraku se trudimo da **što manje izgubimo** (izbacimo centar koji najviše opterećuje troškove transporta).

Cilj je naravno da se dobije **dopustivo rešenje** i se to postigne, procedura je završena.

alternativna heuristika

- naizmenično nalazimo nove lokacije

- na osnovu njih odlučujemo gde će se koji korisnici snabdevati

- formiramo nove, bolje centre za korisnike (ako je moguće)

- Cilj: doći do optimalnog rešenja, čime se završava procedura (tj. nema poboljšanja između dve iteracije)

Heuristika zamene mesta

1.KORAK

Naći početno rešenje tj. izabrati proizvoljan skup J, i naći vrednost funkcije koristeći minimizaciju troškova

$J \subseteq L, |J| = p$

2. KORAK

Za svaki centar j iz skupa J i za svaki centar k iz skupa L / J, uraditi sledeće:

- Zameniti centar j iz rešenja jednim koji trenutno nije u rešenju (k)
- Izračunati promenu u funkciji cilja

2•Zapamtiti indekse j i k gde je funkcija bila najmanja i odgovarajuće indekse obeležiti sa j' i k'

3.KORAK

Ako je fj'k'>0 , kraj.

(dobijen je tzv. lokalni minimum J)

4.KORAK

- Ažurirati novo rešenje kao

$J \leftarrow J \setminus \{j'\} \cup \{k'\}$

i preći na korak 2.

Jednostavni zemljišni problem

- U JZP ne mora biti locirano tačno p novih objekata

Razlika izmedju p-težišnog i jednostavnog zemljišnog problema (JZP) je skoro neprimetna. Kod JZP se figuriše uslov da mora biti locirano tačno p novih objekata. Pored toga, u model su uključenii troškovi instalacije (otvaranja) novog objekta fj (cena zemljišta, cena gradnje i sl.)

$$(\min) f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$0 \le x_{ij} \le y_j, \; i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n,$$

$$y_j \in \{0,1\}, \; j = 1,2,\ldots,n;$$

DUALOC

Rešava dualni zadatak relaksacionog zemljišnog problema (JZP u kome je ograničenje tj. uslov celobrojnosti obrisan tj. relaksiran)

- Nalaženjem rešenja DRZP dobijamo donj granicu za primalni JZP zadatak

- Vrlo često se već nakon prve faze metode DUALOC dobija optimalno rešenje

$$\max_{v,w} g(v) = \sum_{i=1}^{m} v_i$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} \le f_j, \quad j = \overline{1,n}$$

$$v_i - w_{ij} \le n_i t_{ij}, \quad i = \overline{1,m} \text{ i } j = \overline{1,n}$$

$$w_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \text{ i } j = \overline{1,n}$$

gde je $w_{ij} = \max\{v_i - t_{ij}, 0\}$. Vidimo da je prilikom formulisanja ovog dualnog modela uslov $y_j \in \{0,1\}$ eliminisan, tj. relaksiran. Ideja DUALOC-a je sledeća. Neka $v(\cdot)$ označava vrednost funkcije cilja. Očigledno važi $v(JZP) \ge v(RZP) = v(DRZP)$. Nalaženjem rešenja DRZP (dualnog) problema, dobijamo dakle donju granicu za primalni JZP zadatak.

4. Prekrivanje skupa

4.1. Set covering problem

4.2. Maximal covering problem

4.1. Set covering problem

$$(\min) f(y) = \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

p.o.

$$\sum_{j \in N_i} y_j \geq 1, \; i = 1,2,\ldots,m$$

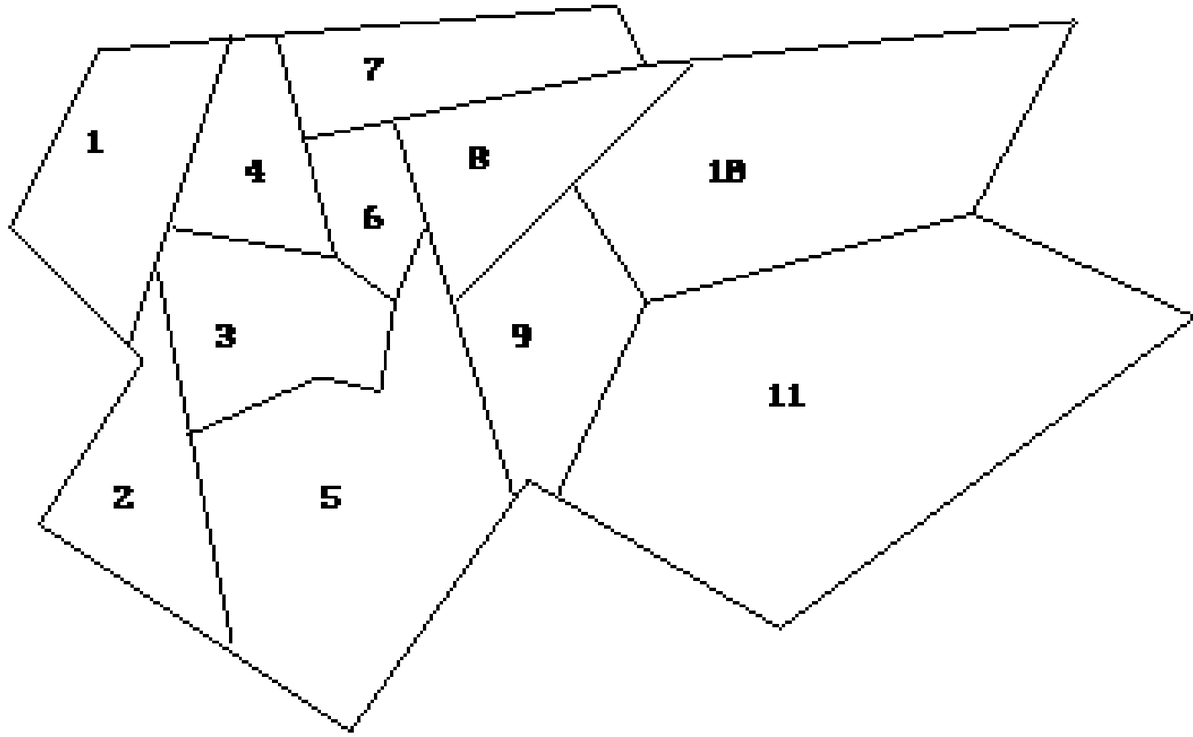
$$y_j \in \{0,1\}, \; j = 1,2,\ldots,n$$

gde je $N_i = \{ j / t_{ij} \leq \bar{t}_i \}$.

4.1. Set covering problem

Novi lanac apoteka ulazi na tržište i želi da otvori više prodajnih objekata na teritoriji grada koji je podeljen na 11 celina. Treba podelu izvršiti tako da svaki kupac stiže do apoteke za 10 minuta, a kupovinu obavlja u svojoj oblasti ili onoj koja je susedna.

Apoteke se pozicioniraju u centrima oblasti.



4.2. Maximal covering problem

Zadatak je sledeći: maksimizovati broj poseta (ili poziva) u odnosu na novčana ograničenja $\bar{t}_i$,

$$(\min) f(y,c) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} N_{ij}c_{ij} \qquad N_{ij} = \begin{cases} N_i, & t_{ij} \le \bar{t}_i \\ 0, & t_{ij} \boxed{<} \bar{t}_i \end{cases}$$

$\boxed{>}$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \le 1,\ i = 1,2,\ldots,m;$$

$$c_{ij} \le y_j$$

$$y_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,\ldots,n,$$

$$\sum y_j = p.$$

5. Problem p-centara

$$\min f(y,c) = \max n_i \cdot t_{ij} \cdot \overset{*Yj}{c_{ij}}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

p.o.

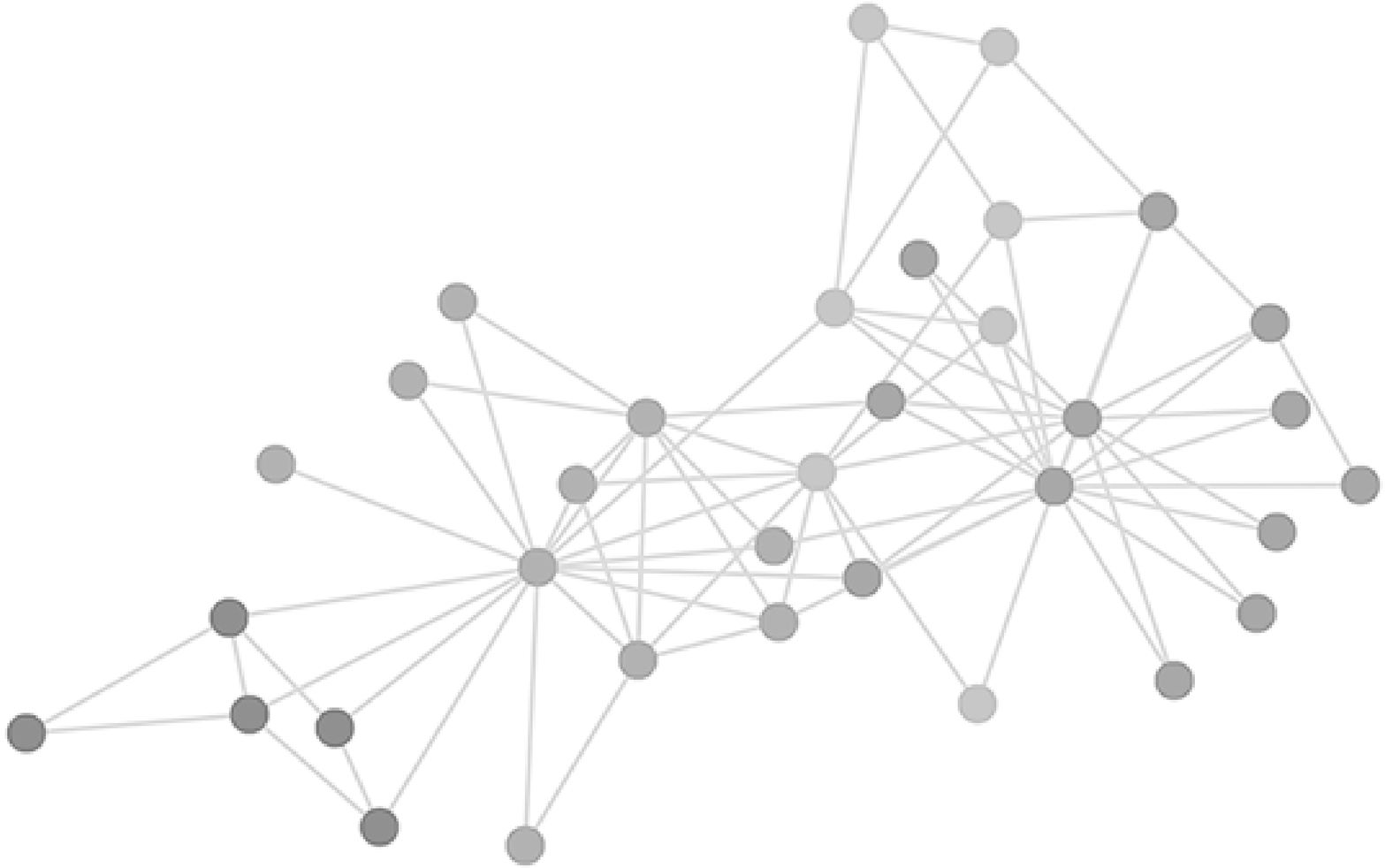
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1, \; i = 1,2,\ldots,m;$$

$$c_{ij} \le y_j, \; i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$c_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \; i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p.$$

Mrežni lokacijski modeli



Osobine rastojanja na mreži

Mreža (graf) određena sa $G = (T, L)$, gde je

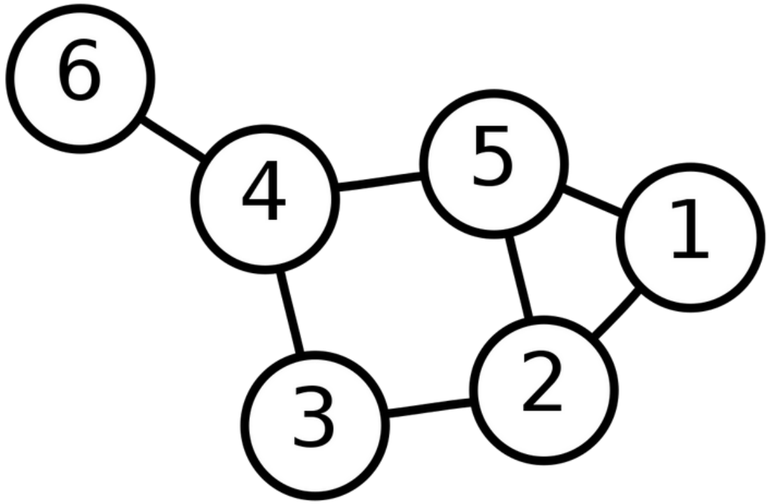
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ skup temena grafa,

L je skup lukova (t_i, t_j) koji spajaju t_i i t_j. U daljem tekstu pretpostavićemo da je $i < j$.

Obeležićemo sa $I = \{1, \ldots, m\}$ i takođe pretpostaviti sledeće:

(i) svaka dva luka seku se u najviše jednom zajedničkom temenu,

(ii) najviše 1 luk spaja svaka 2 temena,



Osobine rastojanja na mreži

- Dva luka su *susedni* ako imaju bar jedno zajedničko teme,
- *Put* je niz povezanih lukova gde svaki par susednih lukova ima isto teme.
- Ako je početno teme puta jednako krajnjem, govorimo o *krugu* ili *ciklusu*.
- Put koji ne sadrži krug, je *jednostavan put*.
- Krug (ciklus) u kome se lukovi ne ponavljaju je *jednostavan krug* (*ciklus*). Uvek će se govoriti ubuduće o jednostavnim putevima i ciklusima.
- *Dužina puta* je zbir dužina lukova u putu.
- *Rastojanje* između dva temena (t_i, t_j) je dužina najkraćeg puta od t_i do t_j. Očigledno važi

  $d(t_i, t_j) = d(t_j, t_i)$
- *Mreža* je *povezana* ako najmanje jedan put povezuje svaka dva temena. U suprotnom je mreža nepovezana. Ubuduće će sve mreže biti povezane, ako se ne naglasi suprotno.

Osobine rastojanja na mreži

Osnovno je pitanje kako definisati $d(x, y)$, kada su x i y dve proizvoljne tačke na lukovima. U tom cilju zamislimo da su i x i y nova temena; rastojanje $d(x, y)$ je sada definisano kao najkraći put između dva temena. Formalno, funkcija rastojanja zaista ispunjava:

(1) simetričnost, $d(x, y) = d(y, x)$
(2) pozitivnost $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = 0$ za $x = y$
(3) nejednakost trougla $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, za svako x, y i z.

Stav 1. U datom grafu $G(T, L)$, neka je luk označen sa $(t_p, t_q) \in L$, $x \in (t_p, t_q)$ i neka je t_i bilo koje teme. Funkcija rastojanja $d(x, t_i)$ ima sledeće osobine:

a) neprekidna na luku (t_p, t_q)
b) ako x varira između t_p i t_q, tada ili

$d(x, t_i)$ - linearno raste
$d(x, t_i)$ - linearno opada
$d(x, t_i)$ - prvo linearno raste pa opada

c) $d(x, t_i)$ je konkavna i deo po deo linearna.

Problem p-težišta

Problem p - težista je već ranije definisan. Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots x_p\}$ skup težista koje treba odrediti i koje bi trebalo da se nađu na nekim lukovima mreže G. Označimo sa

$$d(X, t_i) = \min(d(x_1, t_i), \ldots, d(x_n, t_i)), \; i = 1, \ldots m$$

odnosno, pretpostavimo da je rastojanje skupa X i temena t_i jednako rastojanju najbližeg težista iz skupa X do t_i .Ako dodelimo nenegativne pondere svakom temenu (npr. broj stanovnika), $p_1, \ldots p_m$, tada funkcija cilja ima oblik

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i d(X, t_i)$$

Zadatak je: odrediti n -težista (zvanih i apsolutnih n-težista) tako da $f(X)$ ima minimalnu vrednost. Osobine iz Stava 1 omogućuju dokaz sledećeg stava.

Problem p-težišta

Stav 2. (Hakimi /1965/) - Osobina optimalnosti temena

Postoji najmanje jedno apsolutno p – težište za koje su sva težišta u temenima grafa.

Dakle, kao moguće nove lokacije treba razmatrati samo postojeće, tj. temena grafa. Očigledno je da problem nije trivijalan samo ako je $p < m$. U suprotnom bi bilo $f(X) = 0$ i svako težiste bi se podudaralo sa temenom.

Kada je $n < m$, problem dakle postoje kombinatoran, jer treba naznačivati (izdvajati) n-torke iz skupa od m elemenata i nalaziti vrednosti $f(x)$ za svaku n-torku, (kojih ima $\binom{m}{p}$)

Zbog velikog mogućeg broja kombinacija, potpunim prebrojavanjem se rešava gornji problem jedino u slučaju $p = 1$ (naravo, u realnim problemima m je jako veliko).

Problem p - centara na proizvoljnoj mreži

Pretpostavimo da je skup centra $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_p\}$ takav da svaki cenar y_j leži na luku datog grafa, i da je $p < m$. Obeležimo ponovo sa $d(Y, t_i)$, rastojanje proizvoljnog temena t_i do najbližeg centra iz skupa X. Potrebno je odrediti minimum funkcije

$$(\min)\ g(Y) = \max(p_1 d(Y, t_1), \ldots, p_m d(Y, t_m)),$$

gde su p_i, $i = 1, \ldots, m$, ponderi ili težinski koeficijenti pridruženi temenima. Rešenje ovog problema se naziva apsolutni centar i obeležićemo ga sa Y^*.

U problemu nalaženja jednog centra koristi se tzv. osobina temena i presečne tačke (TPT), koju ćemo izraziti u Stavu 3. Pre toga definišemo presečnu tačku.

Tačka na mreži y_{ij} je *presečna* samo ako je:

$$p_i d(y_{ij}, t_i) = p_j d(y_{ij}, t_j) \text{ za neko } i, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ i } i \neq j.$$

Problem p - centara na proizvoljnoj mreži

Stav 3. Apsolutni 1-centar je ili u temenu t_i ili je presečena tačka.(F.Minieka:Them-centerproblem, SIAMRev. 12 (1970), 138-139.

Međutim, osobina TPT (izražena u Stavu 3) važi i za problem nalaženja n - centara.

Stav 4. Postoji najmanje jedan apsolutni p - centar za koji je svaki centar ili teme ili presečna tačka grafa.

Problem prekrivanja na proizvoljnom grafu

O problemima prekrivanja bilo je više reči u poglavlju u kome su razmatrani Diskretni lokacijski problemi. Neka je u ravni dato m - tačka t_i kojima su pridružene konstante r_i. Treba odrediti lokacije što manje novih tačaka iz datog skupa mogućih lokacija Y, tako da svih m-tačaka bude prekriveno, odnosno, treba naći

$$(\min)\,|Y|$$

p.o.

$d(Y, t_i) \leq r_i$, gde $|Y|$ označava broj članova skupa Y.

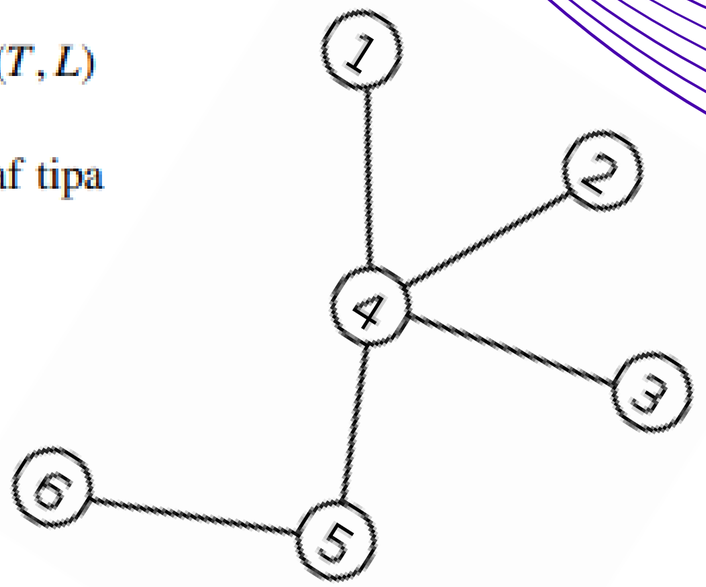
Mreža tipa stablo

S ima sledeće osobine:

(i) S je povezan graf bez krugova (ciklusa);
(ii) postoji nakraći put između svake dve tačke u S

Pored toga, mrežni lokacijski problemi na stablu se vrlo jednostavno rešavaju. Sledeći stav govori o osobini funkcije rastojanja na stablu.

Stav 6. a) Funkcija $f(x) = d(x,t)$ je konveksna za svako $t \in T$, ako i samo ako je $S(T,L)$ stablo.
b) Funkcija $f(x, y) = d(x, y)$ je konveksna na celom grafu, ako i samo ako je graf tipa stablo.



Nalaženje 1- težišta na stabu

Problem 1- težišta je nalaženje nove tačke x^* na mreži, tako da se minimizuje zbir težinskih rastojanja od x^* do podskupa temena mreže. Tačka x^* se naziva apsolutno težište. Ako sa $f(x)$ označimo ukupno rastojanje između x i m temena, imamo

$$f(x) = p_1 d(x,t_1) + p_2 d(x,t_{21}) + \ldots + p_m d(x,t_m),$$

gde $p_i, i = 1,\ldots m$, mogu predstavljati npr:

- broj dolazaka do x (poštanskog sandučeta) u datom vremenskom periodu iz temena t_i,
- ukupni transportni troskovi po jedinici rastojanja iz temena t_i,
- ukupno vreme po jediničnom rastojanju itd.

Označimo sa $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$, a mreže. Sledeći algoritam (A.Goldman (1971), Optimal center location in simple network, Transportation Sci. 5, 212-221) rešava ovaj problem.

Nalaženje 1- težišta na stabu

Algoritam 1.

Korak 1. Izabrati bilo koji list (teme povežemo lukom samo sa jednim temenom) t_1 sa težinom p_1. Ako je $p_1 > p/2$, t_1 je rešenje i kraj.

Korak 2. Označiti sa t_0 teme koje je povezano sa t_1 i sabrati p_1 i p_0 kao novi ponder temena t_0 $(p_1 + p_0 = p_0)$.

Izbrisati luk (t_0, t_1) i preći na Korak 1.

Iz algoritma se može izvući i interesantno svojstvo podstabla (odnosno pojedinih "grana" stabla).

(A.Goldman, C. Witzgall: A location theorem for optimal facility placement, Transportation Sci. u (1970) 406-409)

Stav 7. Neka je dato stablo S i bilo koji luk (t_p, t_q). Ako izbrišemo sve unutrašnje tačke datog luka, dobićemo dva pod stabla, S_p i S_q. Ako je suma težina temena S_p najmanje $p/2$, tada S_p sadrži apsolutno težište.

Očigledna posledica ovog stava je da ako jedno teme grafa ima težinu ne manju od S $p_i/2$, tada je ono i apsolutno težište.

Nalaženje jednog centra na stablu

Podsetimo se da je apsolutni 1-centar y^* tačka na mreži koja minimizuje maksimalna težinska rastojanja od y^* do podskupa temena gafa. Pretpostavimo da taj podskup sadrzi m - temena sa pozitivnim ponderima (težinama) $p_i, i = 1, \ldots m$. Matematički model je dakle

$$(\min)\ g(y) = \max(p_1 d(y, t_1), \ldots, p_m d(y, t_m))$$

gde ponderi mogu imati različita značenja:

- vreme po jediničnom rastojanju
- cena prevoza po jedinici rastojanja
- gubitak po jedinici rastojanja.

Prvo ćemo izloziti algoritam rešavanja za ne težinski slučaj problema nalaženja jednog centra, odnosno slučaj kod koga su svi $p_i = 1, i = 1, \ldots m$. Algoritam omogućuje sledeći Stav.

Stav 8. Apsolutni ne težinski 1-centar leži na sredini najdužeg puta na stablu.

Nalaženje jednog centra na stablu

Algoritam 2. (G.Handler (73): Minimax location of a facility in an undirected tree graph, Transport. Sci.7 (1973), 287-293)

Korak 1. Izabrati proizvoljno teme grafa, t;

Korak 2. Naći najudaljeniji list od t i obeležiti ga - t';

Korak 3. Naći najudaljeniji list od t' i obeležiti ga t''.

Apsolutni centar je na polovini t', t''.

U praksi se često javlja problem nalaženja jednog centra u kome figurišu i neki dodatni parametri. Takvi modeli se mogu formulisati sa

$$(\min)\ g(y) = \max(p_1 d(y,t_1) + h_1, \ldots, p_m d(y,t_m) + h_m)$$

gde $h_i, i = 1, \ldots, m$ mogu predstavljati (ako $p_i d(y,t_i)$ tumačimo kao vreme potrebno za put od y do t_i

- vreme pripreme za put (npr. vatrogasci)
- vreme pripreme intervencije u temenima (npr. kod hitnih sluzbi itd.).

Ukoliko je $h_i = 0$, tada se ovaj model "sa dodacima" poklapa sa modelom 1- centra.

Problem prekrivanja na stablu

Matematički model ima sledeći izgled

(p) $\quad (\min)\,|x|$

p.o.

$$d(X, t_i) \le s_i, \; i = 1, \ldots, m,$$

gde je $X = (x_1, \ldots, x_n)$ skup mogućih centara, a $|x|$ kardinalni broj

Problem prekrivanja na stablu

1. Izabrati proizvoljan list i proveriti da li kanapi koji iz njega izlaze mogu dostići susedno teme (ako nema nijednog kanapa u listu, luk i list se uklanjaju iz mreže).

2. Ako svi kanapi dostižu susedno teme, obrisati list i luk, a ostatak dužine kanapa iz dotičnog lista će sada izlaziti iz susednog temena.

3. U suprotnom (tj. ako najkraći kanap ne dostize susedno teme) tada se centar određuje na kraju kanapa duž luka i svi kanapi koji mogu dostići centar se trajno uklanjaju sa slike.

4. Ako su svi kanapi uklonjeni ili ako je ostalo jedno teme, kraj. U suprotnom, preći na Korak 1.