Kontinualni lokacijski modeli

Jelena Panić 748/15

Vidosava Antonović 819/15

O modelima

- Matematički modeli teorije lokacije daju nam odgovore na neka od sledećih pitanja : Koliko novih objekata treba otvoriti? Gde će oni biti locirani? Kog kapaciteta? Itd.
- Matematički modeli lokacije najčešće se dele na diskretne, kontinualne i mrežne.

Klasifikacija lokacijskih problema I modela

Prema :

- Topografiji : *kontinulani, diskretni* i *mrežni*
- Obliku funkcije cilja : *Min-Sum i Min-Max*
- Prema broju objekata koje treba otvoriti : *endogeni* – broj unapred poznat i *egzogeni* – ovaj broj je nepoznat i dobija se kao rezultat optimizacije

Takodje mogu biti : statistički i dinamički, jednokriterijmski i višekriterijumski, jednorobni i višerobni, stohastički i deterministički idt.

Kontinualni lokacijski modeli

- Kontinualni lokacijski modeli su modeli kod kojih se nepoznate nalaze u kontinualnom prostoru
- Koristimo ih kada se objekti mogu locirati u ravni R^2 ili u prostoru R^3
- Polje promenljivih je kontinuum, odnosno dopustivi skup ima beskonačno mnogo tačaka

Lokacija jednog objekta (Veberov model)

- Treba izabrati tačku u ravni kojom se dostiže minimum ili maksimum nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno
- Veberov problem se formuliše na sledeći način : dato je **m** tačaka u ravni $A_1,A_2...,A_m$ i **m** skalara (težina) koji su dodeljeni svakoj tački $W_1,W_2,...,W_m$. Naći tačku **X** za koju je suma težinskih rastojanja do datih tačaka minimalna.
- Primer : Robna kuća

Matematički model Veberovog problema

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot d(x, a_i),$$

gde su

$x = (x_1, x_2)$ - koordinate nepoznate lokacije;

m - broj fiksnih (postojećih) lokacija ili korisnika,

$d(x, a_i)$ - rastojanje i-tog korisnika do nepoznate lokacije,

n_i - broj elemenata i -tog korisnika,

r_i - jedinična cena prevoza i-tog korisnika,

$w_i = n_i r_i$ - težinski koeficijenti pridodeljeni i-tom korisniku,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate (lokacije) i-tog korisnika,

f_w - funkcija cilja Veberovog problema.

Načini merenja rastojanja

- Za merenje rastojanja koristimo dve metrike, to su **Euklidova** i **Pravougaona metrika**

1. **Euklidova metrika**

Ako x i z pripadaju R^n , tada je njihovo Euklidovo rastojanje dato sa

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2} = \| x - z \|_2,$$

Funkcija cilja sada ima oblik :

$$(\min) f_w(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(x, a_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^{(i)})^2 \right)^{1/2}$$

- Funkcija f_w (x) je **konveksna** i **nije glatka** (parcijalni izvodi su prekidne funkcije)

- Prvi korak rešavanja problema Euklidovom merom rastojanja jeste provera da li je optimalna lokacija u nekoj od fiksnih tačaka, ako nije primenjuje se neka od metoda bezuslovne minimizacije koje ne zahtevaju glatkost.
- Medjutim, funkcija f_w (x) se može transformisati u glatku funkciju korišćenjem **hiperbolijske aproksimacije :**

$d^H(x,z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \varepsilon}$ gde je ε proizvoljan mali broj.

- Ali u ovom slučaju dodatni problem je numerička nestabilnost – vrednost funkcije cilja reformisanog modela može biti veoma blizu originalnog zadatka, dok njihova rešenja tj. koordinate mogu biti znatno različite.
- Drugi način nalaženja rešenja je u numeričkom rešavanju sistema nelinearnih jednačina $$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i \cdot (x_j - a_j^i)}{d(x, a_i)} = 0,$$

odakle dobijamo sledeći izraz :

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{a_j^{(i)} \cdot w_i}{d(x, a_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(x, a_i)}}$$

* Ova metoda je iterativna.

2. Pravougaona metrika

U gradskim uslovim, direktno rastojanje izmedju novih i postojećih tačaka odredjeno Euklidovom metrikom, često je nerealno. Zbog toga se u Teoriji lokacije koriste i modeli sa pravougaonom metrikom.

- U ovom slučaju rastojanje odredjujemo sa $d_i(x) = \sum_{j=1}^{n} | x_j - a_j^{(i)} |, \ i = 1, \dots, m.$

  tada funkcija cilja ima oblik :

$$
\begin{aligned}
f_w(x) &= \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (| x_1 - a_1^{(i)} | + | x_2 - a_2^{(i)} |) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} w_i | x_1 - a_1^{(i)} | + \sum_{i=1}^{m} w_i | x_2 - a_2^{(i)} | = \\
&= f_{w1}(x) + f_{w2}(x)
\end{aligned}
$$

- Na ovaj način se problem svodi na dve minimizacije po jednoj promenljivoj tj. rešavamo dva nezavisna zadatka sa po jednom promenljivom. Prvo se rešava problem za jednu koordinatu (min) $f_1(x_1)$ odakle se dobija $\mathbf{X_1^*}$, a zatim za drugu (min) $f_2(x_2)$ odakle dobijamo $\mathbf{X_2^*}$.
- Tačka $\mathbf{X^*=(x_1^*,x_2^*)}$ predstavlja rešenje polaznog Veberovog problema.
- Algoritam :

Ako su zadate tačke $A_i=(a_1^i,a_2^i)$ i težinski koeficijenti tih tačaka W_i, i=1,..,m algoritam za određivanje j-te koordinate je:

1. Sortirati koordinate tačaka A_i, i= 1, ..m u neopadajući niz. Dalje se predpostavlja da indeks (i) raste po sortiranom redosledu: $aj^1 \leq a_j^2 \leq \ldots \leq a_j^m$.

Moguća su dva slučaja :

I. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\sum_{i=1} w_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1} w_i < \sum_{i=1} w_i$ pri čemu za k=1

leva strana nejednakosti jednaka 0, tada je tražena j-ta koordinata $x_j^* = a_j^k$

II. Ako za neko k koje pripada skupu {1,2,..,m} važi $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i$ tada je rešenje višestruko, tj. tražena koordinata x_j^* može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[a_j^k, a_j^{k+1}]$.

Primenjujući ovaj algoritam za j=1, a zatim za j=2 dobijaju se obe koordinate tačke **X***

Vajsfeldov algoritam za rešavanje Veberovog problema

1. Izračunati medjusobna rastojanja izmedju svih **m** tačaka :

$$d(A_r,A_l) = \sqrt{(a_1^r-a_1^l)^2 + (a_2^r-a_2^l)^2}\ ,\ \forall\, r\,,\, l \in \{1,\ldots,m\}$$

2. Proveriti da li za neku tačku **r** koja pripada skupu {1,..m} važi :

$$c_r = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2 + \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} \frac{w_i(a_1^r-a_1^i)}{d(A_r,A_i)}\right)^2} \leqslant w_r$$

Ako je ovaj uslov ispunjen za neko **r** onda je **KRAJ.** Rešenje se nalazi u tački A_r

U suprotnom, ići na naredni korak.

3. Stavimo da je k=0 i odredimo početno rešenje $\mathbf{X^0 = (x_1^0,x_2^0)}$ po formuli :

$$x_j^0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_j^i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}, \quad j = 1, 2$$

4. Izračunati rastojanja izmedju $X^k = (x_1^k, x_2^k)$ i zadatih tačaka :

$$d(X^k,A_i) = \sqrt{(x_1^k-a_1^i)^2 + (x_2^k-a_2^i)^2}, \quad \forall\, i \in \{1,..,m\}$$

5. Zatim računamo po iterativnoj formuli :

$$x_j^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_j^i}{d(X^k,A_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{d(X^k,A_i)}}, \quad j = 1, 2$$

6. Ako je $\mathbf{|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon}$ za svako **j** koje pripada skupu {1,2} onda je **KRAJ.**

X^{k+1} se usvaja kao "dovoljno dobro" rešenje. U suprotnom, staviti k= k+1 i ići na 4. korak

- Lokacija jednog objekta – prošireni modeli
  - Raulsov problem

- Lokacija više objekata
  - Lokacijsko – alokacijski problem

Lokacija jednog objekta – prošireni modeli

- 1) Lokacijska ograničenja
- 2) Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja
- 3) Lokacija neželjenih objekata

- *Raulsov problem, Min-max kriterijum
  - Veber – Raulsov problem

Lokacijska ograničenja

- lokacije u kojima se ne može graditi novi objekt
- skup dopustivih lokacija – **D**

- tada prošireni model ima oblik:

$$\min fw(x) = \Sigma\, w_i\, d(x, a_i)$$

Korak 1. Naći bezuslovni minimum zadatka (1) i obeležiti ga sa x;

Korak 2. Proveriti da li je tačka x – dopustiva, ako jeste, kraj;

Korak 3. Uvodi se koncept vidljivosti, tj. nalazi se podskup dopustivog skupa koji je vidljiv iz x.

Korak 4. x^* je najbliža sa x, a pripada podskupu određenom u Koraku 3 (tj. x^* je najbliža dopustiva, a vidljiva iz x).

Nelinearna zavisnost funkcije cilja od rastojanja

- iako je funkcija od x nelinearna, u proširenom modelu je zavisnost funkcije od rastojanja linearna
- ako je $y_i = d_i(x)$, tada je funkcija cilja linearna po y:

$$f(y) = \sum_{i=0}^{m} w_i\, y_i$$

- primer: ako uvodimo u model fiksne troškove transporta
- Algoritam 4.
- Korak 1: rešiti $\sum_{i=1}^{m} (k_i + w_i\, d_i(x))$ (sa ili bez lokacijskih ograničenja) Vajsfelodovom metodom;
- Korak 2: uporediti x sa a_i, $i = 1, \ldots, m$ i naći najmanju vrednost tj.

$x^* = \arg\min \{f(x^*), f(a_1), \ldots, f(a_m)\}$.

primer: minimalno vreme dolaska hitnih službi opada sa povećanjem rastojanja

Veliki kvadrat – mali kvadrat

- metoda za rešavanje

Korak 1: Izabrati početnu tačku $x_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ koja pripada konveksnom omotaču (KO) i naći $\overline{f} = f(x_0)$

Korak 2: Podeliti konveksni omotač KO $(a_i, \ldots, a_m)$ na zone (kvadrate) i naći donju granicu svake od zona, tj. $\underline{f}_{z_j} = \sum_{i=1}^{m} c_i[d_i(Z_j)]$ gde je dijametar $d_i(Z_j) = (min)d(a_i, Z_j)$ - najkraće rastojanje između a_i i zone Z_j.

Korak 3: Eliminisati sve zone Z_j za koje važi $\underline{f} > \overline{f}$

Korak 4: ako je dijametar ne eliminisanih zona manji od proizvoljno malog broja ε , kraj.

Korak 5: izračunati vrednosti f u proizvoljnim tačkama ne eliminisanih zona (na primer u centru) i onu gde je f najmanja označiti sa $\overline{f}$. Podeliti preostalu oblast na još manje zone tj. preći na korak 2.

Lokacija neželjenih objekata (anti Weber)

- udaljeno od mesta gde ljudi žive ali dovoljno blizu zbog cene transporta
- oblik funkcije cilja je: $(min) f_D = \sum_{i=1}^{m} (D_i[\, d_i(x)], x \in S$ gde su

S – skup dozvoljenih lokacija;

x – nepoznata lokacija;

D_i - opadajuća, i neprekidna nelinearna funkcija od rastojanja;

- traži se dakle lokacija neželjenog objekta, tako da ukupna "šteta" *f(x)* u odnosu na postojeće objekte) bude minimalna

Raulsov problem, Min-Max kriterijum

- za razliku od Vebera ne zapostavlja izolovane korisnike usluga
- ravnomeno tretiranje naseljenih i nenaseljenih mesta
- umesto Min-Sum, predložen je Min-Max kriterijum po kome se minimizira težinsko rastojanje između novog i postojećih objekata

$$(min) f_R(x) = max\ w_i d_i(x)$$

- ukoliko su težinski koeficijenti jednaki 1 : $(min) f_R(x) = max\ d_i(x)$

Rešavanje Raulsovog problema (Elzing, Heran)

- Korak 1: Konstruisati konveksni omotač H, skupa tačaka A= {a_i, i =1, ... ,m}
- Korak 2: Izabrati bilo koja dva temena iz skupa A, i obeležiti ih sa a i b.
- Korak 3: Tačke a i b određuju prečnik kruga. Ako sve tačke iz A pripadaju krugu, tj.

$H \subset K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, tada je $x^* = \frac{a+b}{2}$, kraj; ako nije izabrati bilo koju tačku c∈A van kruga K

- Korak 4: ako je trougao abc pravougli ili tupougli, obeležiti temena najveće stranice sa a i b pa preći na Korak 2; ako je trougao oštrougli, opisati krug (centar x) oko trougla abc; ako sve tačke a_i, ... ,a_m pripadaju krugu (lopti), tada je $x^* = x$ i kraj;
- Korak 5: izabrati tačku a van kruga, a sa b označiti tačku trougla najdalju od a. Povući pravu $\overline{Ob}$ i sa c označiti tačku trougla sa druge strane prave od a, pa preći na Korak 3.

Veber – Raulsov problem

- Dvokriterijumski zadatak gde je $f = (f_w, f_r)$
- Sledeći algoritam koristi specifičnosti ova dva lokacijska zadatka:
- Korak 1: Rešiti Veberov problem $f_w(x)$; obeležiti sa x' optimalno rešenje;
- Korak 2: Izračunati $f_r(x')$; obeležiti sa f' dobijenu vrednost;
- Korak 3: $f' = f' - h$, gde je h - korak, fiksni mali broj;
- Korak 4: Umanjiti proporcionalno sa h u odnosu na f ' sve $d_i(x)$ i obeležiti ih sa $r_i(x)$, tj.

$$r_i(x) = d_i(x')\frac{f' - h}{f'}$$

- Korak 5: Opisati krugove sa centrima u a_i i poluprečnicima $r_i(K_i(a_i, r_i))$.
- Korak 6: Ako je presek krugova prazan skup x' je Pareto optimalno rešenje i kraj. U suprotnom rešiti Veberov problem sa lokacijskim ograničenjima koja su predstavljena kao presek krugova, obeležiti dobijeno rešenje sa x' pa preći na korak 2.

Lokacija više objekata

- Češće u praksi – određivanje više novih objekata istovremeno
- Kod lokacije više objekata pojavljuju se sledeća pitanja:

  - koji je optimalni broj novih objekata?

  - koji korisnici su usluženi od kog snabdevača (alokacijske promenljive y_{ij})

  - koja je uloga interakcije između snabdevača (novih objekata)?

- Razlikujemo - one kod kojih postoji interakcija između novih lokacija

  i one kod kojih međusobna veza ne postoji.

Lokacija više objekata

- Min-Sum (Veberov problem lokacije više objekata)
- Min-Max lokacijski problem sa više novih objekata
- Lokacija p neželjenih objekata
  - Max-min-min (p-Disprezioni problem)
  - Pakovanje krugova u krug
  - Max-sum-sum (p-odbrambenih problem)

Min-Sum (Veberov) problem lokacije više objekata

- Ovaj problem formulisao je Miehle 1958:

$$(\min)\ f_M(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q} w_{ij}\ d_i(x_j) + \sum_{j=1}^{q-1}\sum_{k=j+1}^{q} v_{jk}\ d(x_j, x_k)$$

m - broj fiksnih (postojećih) objekata,

q - broj novih objekata,

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ - nepoznate lokacije novih objekata

$x_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ – $j = 1, \ldots, q$, koordinate nepoznatih objekata,

v_{jk}, $j,k = 1, \ldots, p$ - mera interakcije izmedju novih objekata j i k (odnosno cena), gde je $v_{jk} = v_{kj}$,

w_{ij} - cena jediničnog transporta od korisnika i do nove lokacije j,

$d_i(x_j) = d(x_j, a_i)$ - rastojanje između korisnika i j-te nove tačke,

$a_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ - koordinate i-tog korisnika.

Lokacija p neželjenih objekata

- Klasa modela neželjnih novih objekata, sa ciljem da ti novi objekti budu što je moguće dalji jedni od drugih
- Ne figurišu postojeći objekti
- Max-min-min (p-disperzioni problem)
- Max-sum-sum (p-odbrambeni problem)

Max-min-min(p-disperzioni problem)

- Zadatak pakovanja krugova jednakih poluprečnika u kvadrat
- Max r
- pri ograničenjima
- $d(x_{i,}x_j\ ) \geq r$, za svaki i,j=1,...,p $i \neq j$
- $x_i \in S$

Pakovanje krugova u krug

- Reformulacioni spust

Korak 1. Konstruisati namanje dve nelinearno povezane formulacije problema;

Korak 2. Izabrati početno rešenje Z;

Korak 3. Ponavljati sledeće korake po svim definisanim formulacijama:

- (a) naći stracionarnu tačku Z` primenom neke NP metode, čije je početno rešenje Z;
- (b) ako je Z` bolje od Z, tada je Z= Z`; vratiti se na korak 3, tj. na prvu formulaciju;

Lokacijsko – alokacijski problem

- U praksi je češće da su w i v nepoznate
- Pojednostavljeni model
- Više izvorni Veberov problem
- Obllik modela

$$(\min)\ f_{LA}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} y_{ij}\, w_i\, d_i(x_j)$$

- Pri ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{p} y_{ij} = 1 \qquad \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}$$

$$0 \le y_{ij} \le 1 \qquad \mathrm{i}=1,..,\mathrm{m} \quad \mathrm{j}=1,..,\mathrm{p}$$

Lokacijsko – alokacijski problem

- Alternativna heuristika Cooper
- p-Median heuristika
- Meta-heurističke metode
- LA model ograničenih kapaciteta
- Model sa konstantnim fiksnim troškovima (FT)
- Model lančanog snabdevanja (Supply chain management)